t を実数とし，座標空間内の 2 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ t^2-1)$，$\mathrm{Q}(t,\ 1,\ e^t+e^{-t}-e-e^{-1})$ を考える．t を $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲で動かすとき，線分 PQ が通過してできる曲面および 2 平面 $y=1$，$z=0$ で囲まれてできる立体の体積を求めよ．

(23 信州大 医 7)

【答】 $\dfrac{2}{9}+\dfrac{4}{3e}$

【解答】

点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ t^2-1)$ は z 軸上を，点 $\mathrm{Q}(t,\ 1,\ e^t+e^{-t}-e-e^{-1})$ は平面 $y=1$ 上を動くので，線分 PQ が通過してできる曲面 K は $0 \leqq y \leqq 1$ の範囲に存在する．

曲面 K の平面 $y=u$ $(0 \leqq u \leqq 1)$ による切り口は，線分 PQ を $u:(1-u)$ に内分する点を R とすると，t を $-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲で動かしたときの R の軌跡である．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}} &= (1-u)\overrightarrow{\mathrm{OP}}+u\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\ &= (1-u)\big(0,\ 0,\ t^2-1\big)+u\big(t,\ 1,\ e^t+e^{-t}-e-e^{-1}\big)\end{aligned}$$

であり，R の座標を $(x,\ y,\ z)$ とおくと

$$\begin{cases} x=ut \\ y=u \\ z=(1-u)(t^2-1)+u(e^t+e^{-t}-e-e^{-1}) \end{cases}$$

となる．

(i) $u=0$ のとき

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=t^2-1 \end{cases}$$

R は z 軸上の線分 $x=y=0$ $(-1 \leqq z \leqq 0)$ である．

(ii) $u \neq 0$ $(0<u \leqq 1)$ のとき，$f(t)=(1-u)(t^2-1)+u(e^t+e^{-t}-e-e^{-1})$ とおくと

$$\begin{cases} t=\dfrac{x}{u} \\ y=u \\ z=f\left(\dfrac{x}{u}\right) \end{cases}$$

であり，R は平面 $y=u$ 上の曲線 $z=f\left(\dfrac{x}{u}\right)$ $\left(-1 \leqq \dfrac{x}{u} \leqq 1\right)$ である．

z は t について偶関数であり，$0<t<1$ において

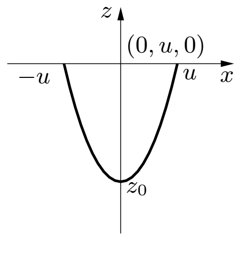
$$\frac{dz}{dt}=2(1-u)t+u(e^t-e^{-t})>0$$

であるから，$0 \leqq t \leqq 1$ で z は増加する．また，

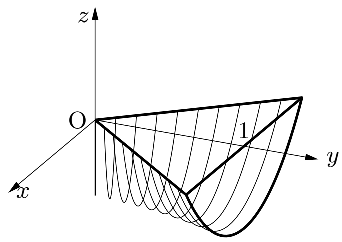
$t=0$ のとき $\begin{cases} x=0 \\ z=-(1-u)+u(2-e-e^{-1}) \ (=z_0 \text{とおく}) \end{cases}$

$t=1$ のとき $\begin{cases} x=u \\ z=0 \end{cases}$

である．



以上により，R の軌跡は右図の太線部分となる．



　曲面 K および 2 平面 $y=1$，$z=0$ で囲まれてできる立体と平面 $y=u$ $(0 \leqq u \leqq 1)$ による切り口の面積 $S(u)$ は $0 < u \leqq 1$ のとき

$$S(u) = \int_{-u}^{u} (-z)\,dx$$

$x = ut$ とおくと

$$dx = u\,dt \qquad \begin{array}{c|ccc} x & -u & \longrightarrow & u \\ \hline t & -1 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

であるから

$$\begin{aligned} S(u) &= -\int_{-1}^{1} \{(1-u)(t^2-1) + u(e^t + e^{-t} - e - e^{-1})\} \cdot u\,dt \\ &= u(1-u)\int_{-1}^{1} (1-t^2)\,dt - 2u^2 \int_0^1 (e^t + e^{-t} - e - e^{-1})\,dt \quad (\because \text{ 偶関数}) \\ &= u(1-u) \cdot \frac{(1+1)^3}{6} - 2u^2 \left[e^t - e^{-t} - (e+e^{-1})t \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3}u(1-u) + \frac{4}{e}u^2 \end{aligned}$$

　よって，求める体積は

$$\begin{aligned} \int_0^1 S(u)\,du &= \int_0^1 \left\{ \frac{4}{3}u(1-u) + \frac{4}{e}u^2 \right\} du \\ &= \frac{4}{3} \cdot \frac{(1-0)^3}{6} + \frac{4}{e}\left[\frac{u^3}{3} \right]_0^1 \\ &= \boldsymbol{\frac{2}{9} + \frac{4}{3e}} \end{aligned}$$

……(答)

である．