半球 $\{(x,\ y,\ z)\,|\,x^2+y^2+z^2 \leqq r^2,\ y \geqq 0\}$ を平面 $y=c\ (0<c<r)$ によって 2 つの立体に切断する．以下の問いに答えなさい．解答欄には途中の計算過程も書きなさい．

(1) $y=c$ による半球の切り口の面積を表す関数 $S(c)$ を求めなさい．

(2) 切断された立体のうち領域 $y \geqq c$ にある立体の体積を V_A とし，領域 $y \leqq c$ にある立体の体積を V_B とする．$c=\dfrac{r}{2}$ のとき体積の比 $V_A : V_B$ を求めなさい．

(23 公立千歳科技大 理工 4)

【答】

(1) $S(c)=\pi(r^2-c^2)$

(2) $V_A : V_B = 5 : 11$

【解答】

半球：$\{(x,\ y,\ z)\,|\,x^2+y^2+z^2 \leqq r^2,\ y \geqq 0\}$

平面：$y=c\ (0<c<r)$

(1) 半球と平面 $y=c\ (0<c<r)$ の切り口は

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 \leqq r^2 \text{ かつ } y \geqq 0 \\ y=c \end{cases} \iff \begin{cases} y=c \\ x^2+z^2 \leqq r^2-c^2 \end{cases}$$

であり，半径 $\sqrt{r^2-c^2}$ の円の周および内部である．面積 $S(c)$ は

$$\boldsymbol{S(c)=\pi(r^2-c^2)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 切断された立体のうち領域 $y \geqq \dfrac{r}{2}$ にある立体の体積 V_A は

$$\begin{aligned} V_A &= \int_{\frac{r}{2}}^{r} S(y)\,dy = \int_{\frac{r}{2}}^{r} \pi(r^2-y^2)\,dy = \pi\left[r^2y-\frac{y^3}{3}\right]_{\frac{r}{2}}^{r} \\ &= \pi\left\{\left(r^3-\frac{r^3}{3}\right)-\left(\frac{r^3}{2}-\frac{r^3}{24}\right)\right\} \\ &= \frac{5}{24}\pi r^3 \end{aligned}$$

切断された立体のうち領域 $y \leqq \dfrac{\pi}{2}$ にある立体の体積 V_B は

$$\begin{aligned} V_B &= \int_{0}^{\frac{r}{2}} S(y)\,dy = \pi\left[r^2y-\frac{y^3}{3}\right]_{0}^{\frac{r}{2}} = \pi\left(\frac{r^3}{2}-\frac{r^3}{24}\right) \\ &= \frac{11}{24}\pi r^3 \end{aligned}$$

よって

$$V_A : V_B = \frac{5}{24}\pi r^3 : \frac{11}{24}\pi r^3 = \mathbf{5:11} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $V_A,\ V_B$ の一方を求めたら，半球の体積 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{4}{3}\pi r^3=\dfrac{2}{3}\pi r^3$ からそれを引いて他方の体積を求めてもよい．すなわち

  $$V_B=\frac{2}{3}\pi r^3-\frac{5}{24}\pi r^3=\frac{11}{24}\pi r^3$$

  といった具合である．