$f(x)=x\sqrt{\sin x}\ \left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$ とするとき，曲線 $y=f(x)$ と直線 $x=\dfrac{\pi}{4}$ および x 軸で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ．

(23 北海学園大 工 3(3))

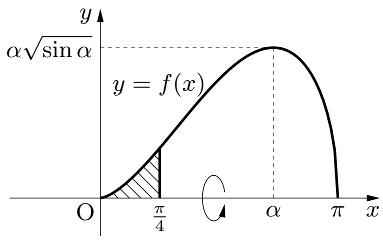
【答】 $V=\sqrt{2}\pi\left(-\dfrac{\pi^2}{32}+\dfrac{\pi}{4}+1-\sqrt{2}\right)$

【解答】

$$f(x)=x\sqrt{\sin x}$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ においては，$f(x) \geqq 0$ かつ $f(0)=0$ であり，$f(x)$ は単調増加である．

曲線 $y=f(x)$ と直線 $x=\dfrac{\pi}{4}$ および x 軸で囲まれた図形は右図の斜線部であり，この図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は



$$V=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\pi\{f(x)\}^2\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^2\sin x\,dx$$
$$=\pi\left(\Big[-x^2\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}x\cos x\,dx\right)$$
$$=\pi\left(\Big[-x^2\cos x+2x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx\right)$$
$$=\pi\Big[-x^2\cos x+2x\sin x+2\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\pi\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{\pi^2}{16}+2\cdot\frac{\pi}{4}+2\right)-2\right\}$$
$$=\boldsymbol{\sqrt{2}\pi\left(-\frac{\pi^2}{32}+\frac{\pi}{4}+1-\sqrt{2}\right)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

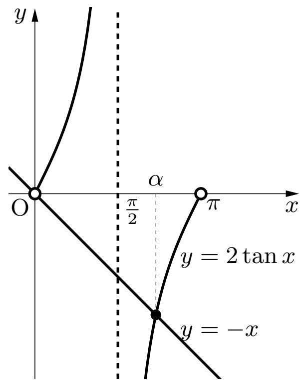
である．

- $y=f(x)$ のグラフを $\sin x \geqq 0$ すなわち $0 \leqq x \leqq \pi$ の範囲で調べる (答案では不要)．

  $0<x<\pi$ のとき

$$f'(x)=1\cdot\sqrt{\sin x}+x\cdot\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$
$$=\frac{2\sin x+x\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$
$$=\begin{cases}1 & \left(x=\dfrac{\pi}{2}のとき\right)\\ \dfrac{(2\tan x+x)\cos x}{2\sqrt{\sin x}} & \left(0<x<\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}<x<\piのとき\right)\end{cases}$$

$2\tan x+x=0$ となる x がただ一つ存在する．このときの x の値を α $\left(\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi\right)$ とおくと，$f(x)$ の増減は次表となる．



x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗		↘	0

したがって，$y=f(x)$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ のグラフは解答内の図となる．