$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，曲線 $C_1 : y = x^2$ と曲線 $C_2 : y = 1 - \cos x$，および直線 $\ell : y = 1$ で囲まれた図形を $D$ とする．図形 $D$ を $y$ 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 $V$ を求めよ．

(23 富山大 後 理 (数) 1)

---

【答】 $V = \pi^2 - \dfrac{5}{2}\pi$

---

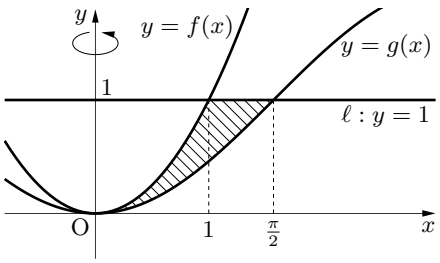
【解答】

$$C_1 : y = x^2, \quad C_2 : y = 1 - \cos x, \quad \ell : y = 1$$

$f(x) = x^2$，$g(x) = 1 - \cos x$，$h(x) = f(x) - g(x)$ とおく．

$$h(x) = x^2 - 1 + \cos x$$
$$h'(x) = 2x - \sin x$$
$$h''(x) = 2 - \cos x > 0$$

したがって，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $h'(x)$ は単調に増加する．$h'(0) = 0$ より，$0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $h'(x) > 0$ であり，$0 \leqq x \leqq \pi/2$ において $h(x)$ は単調に増加する．また，$h(0) = 0$ より，$0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において $h(x) > 0$ である．




よって，$0 < x \leqq \pi/2$ において $f(x) > g(x)$ であり，領域 $D$ は右図の斜線部分となる．境界も含む．

$y$ 軸と直線 $y = 1$ および $y = f(x)$ で囲まれた領域を $y$ 軸のまわりで回転させてできる回転体の体積を $V_1$ とおくと

$$V_1 = \int_0^1 \pi x^2\, dy = \pi \int_0^1 y\, dy = \pi \left[ \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}$$

また，$y$ 軸と直線 $y = 1$ および $y = g(x)$ で囲まれた領域を $y$ 軸のまわりで回転させてできる回転体の体積を $V_2$ とおくと

$$V_2 = \int_0^1 \pi x^2\, dy = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 g'(x)\, dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \sin x\, dx$$
$$= \pi \left\{ \Big[ -x^2 \cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2x \cos x\, dx \right\}$$
$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx \qquad \cdots\cdots ㋐$$
$$= \pi \left\{ \Big[ 2x \sin x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin x\, dx \right\}$$
$$= \pi \left\{ \pi + 2 \Big[ \cos x \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} \right\}$$
$$= \pi^2 - 2\pi$$

よって，図形 $D$ を $y$ 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 $V$ は

$$V = V_2 - V_1 = \left(\pi^2 - 2\pi\right) - \frac{\pi}{2} = \boldsymbol{\pi^2 - \frac{5}{2}\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $V_2$ については，バームクーヘン型の積分公式を用いると

$$V_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi x\{1 - (1 - \cos x)\}\, dx = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x\, dx \qquad \cdots\cdots ㋐$$

となり，部分積分を 1 回減らすことができる．