xy 平面 において，2 つの曲線 $y=\sin x\ \left(\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}\pi\right)$，
$y=\cos x\ \left(\dfrac{\pi}{4} \leqq x \leqq \dfrac{5}{4}\pi\right)$ で囲まれた部分の面積は $\boxed{\text{セ}}$ である．また，この部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は $\boxed{\text{ソ}}$ である．

(23 山梨大 後 医 2(4))

【答】

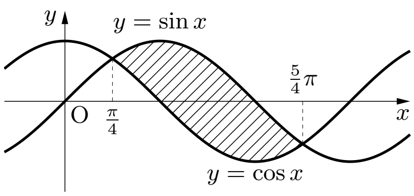
セ	ソ
$2\sqrt{2}$	$\dfrac{\pi(\pi+6)}{4}$

【解答】

$$y=\sin x\ \left(\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{5}{4}\pi\right) \qquad \cdots\cdots ①$$

$$y=\cos x\ \left(\frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{5}{4}\pi\right) \qquad \cdots\cdots ②$$

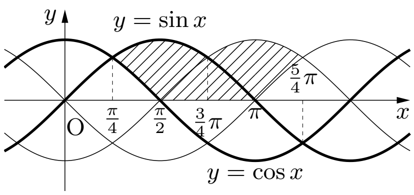
①，② で囲まれた部分は右図の斜線部分だから，面積 S は



$$\begin{aligned}
S &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x-\cos x)\,dx \\
&= \Big[-\cos x-\sin x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \\
&= \left(-\cos\frac{5\pi}{4}-\sin\frac{5\pi}{4}\right)+\left(\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}} \\
&= \mathbf{2\sqrt{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

また，この部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体は，上図の斜線部分を x 軸に関して対称移動してできる右図の斜線部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積に等しい．この部分は直線 $x=\dfrac{3}{4}\pi$ に関して対称であるから，体積 V は



$$\begin{aligned}
V &= 2\times\left(\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \pi\sin^2 x\,dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \pi\cos^2 x\,dx\right) \\
&= \pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{2}} (1-\cos 2x)\,dx-\pi\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2x)\,dx \quad (\because\ \text{半角の公式}) \\
&= \pi\left[x-\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}-\pi\left[x+\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \pi\left\{\left(\frac{3}{4}\pi+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\right\}-\pi\left\{\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)\right\} \\
&= \pi\left(\frac{\pi}{2}+1\right)-\pi\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right) \\
&= \pi\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}\right) \\
&= \boldsymbol{\frac{\pi(\pi+6)}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．