曲線 $y=\sqrt{4x-2}$ と，原点からこの曲線に引いた接線および x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ．

(23 岩手大 後 理工 1(2))

【答】 $\dfrac{\pi}{6}$

【解答】

$$y=\sqrt{4x-2}$$
$$y'=\frac{1}{2\sqrt{4x-2}}\cdot 4=\frac{2}{\sqrt{4x-2}}$$

曲線上の点 $(t,\ \sqrt{4t-2})$ における接線の方程式は

$$y=\frac{2}{\sqrt{4t-2}}(x-t)+\sqrt{4t-2}$$
$$\therefore\quad y=\frac{2}{\sqrt{4t-2}}x+\frac{2t-2}{\sqrt{4t-2}}$$

である．この接線は原点を通るから

$$\frac{2t-2}{\sqrt{4t-2}}=0\qquad\therefore\quad t=1$$

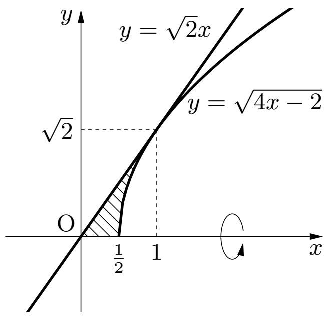
よって，接線の方程式は

$$y=\sqrt{2}x$$

であり，接点の座標は

$$\left(1,\ \sqrt{2}\right)$$

である．よって，求める体積 V は



$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\cdot\pi(\sqrt{2})^2\cdot 1-\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}(\sqrt{4x-2})^2\,dx\\&=\frac{2}{3}\pi-\pi\Big[2x^2-2x\Big]_{\frac{1}{2}}^{1}\\&=\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\pi\\&=\boldsymbol{\frac{\pi}{6}}\end{aligned}$$

……(答)

である．