xyz 空間において，3 点 A(2, 1, 2)，B(0, 3, 0)，C(0, -3, 0) を頂点とする三角形 ABC を考える．以下の問に答えよ．

(1) $\angle$BAC を求めよ．
(2) $0 \leqq h \leqq 2$ に対し，線分 AB，AC と平面 $x = h$ との交点をそれぞれ P，Q とする．点 P，Q の座標を求めよ．
(3) $0 \leqq h \leqq 2$ に対し点 $(h,\ 0,\ 0)$ と線分 PQ の距離を h で表せ．ただし，点と線分の距離とは，点と線分上の点の距離の最小値である．
(4) 三角形 ABC を x 軸のまわりに 1 回転させ，そのときに三角形が通過する点全体からなる立体の体積を求めよ．

(23 早稲田大 理工 5)

【答】

(1) $\dfrac{\pi}{2}$

(2) $\mathrm{P}(h,\ 3-h,\ h)$，$\mathrm{Q}(h,\ 2h-3,\ h)$

(3) $\begin{cases} h & \left(0 \leqq h \leqq \dfrac{3}{2} \text{ のとき}\right) \\ \sqrt{5h^2-12h+9} & \left(\dfrac{3}{2} \leqq h \leqq 2 \text{ のとき}\right) \end{cases}$

(4) $\dfrac{17}{2}\pi$

【解答】

(1) A(2, 1, 2)，B(0, 3, 0)，C(0, -3, 0) なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (-2,\ 2,\ -2),\quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-2,\ -4,\ -2)$$

であり

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} = 4 - 8 + 4 = 0$$
$$\therefore\ \angle\mathrm{BAC} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) A は平面 $x = 2$ 上の点，B，C は平面 $x = 0$ 上の点であるから，

線分 AB，AC と平面 $x = h$ $(0 \leqq h \leqq 2)$ との交点 P，Q はそれぞれ線分 BA，CA を $h : (2-h)$ に内分する点である．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \frac{h}{h+(2-h)}\overrightarrow{\mathrm{BA}} = (0,\ 3,\ 0) + \frac{h}{2}(2,\ -2,\ 2) = (h,\ 3-h,\ h),$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \frac{h}{h+(2-h)}\overrightarrow{\mathrm{CA}} = (0,\ -3,\ 0) + \frac{h}{2}(2,\ 4,\ 2) = (h,\ 2h-3,\ h)$$

よって，P の座標は

$$\boldsymbol{(h,\ 3-h,\ h)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であり，Q の座標は

$$\boldsymbol{(h,\ 2h-3,\ h)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 点 $(h,\ 0,\ 0)$ を R とおくと，点 R と線分 PQ は平面 $x = h$ 上にある．

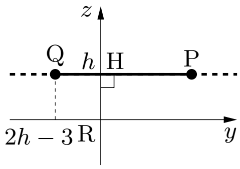
ここで，$0 \leqq h \leqq 2$ なので，点 P の y 座標 $3 - h$ は $1 \leqq 3 - h \leqq 3$ であり，点 Q の y 座標 $2h - 3$ は $-3 \leqq 2h - 3 \leqq 1$ である．点 R と線分 PQ との距離 d は

(i) $-3 \leqq 2h-3 \leqq 0 \left(すなわち\ 0 \leqq h \leqq \dfrac{3}{2}\right)$ のとき

点 R から直線 PQ に下した垂線の足 $\mathrm{H}(h,\ 0,\ h)$ は線分 PQ 上にあるから

$$d = \mathrm{RH} = h$$

である．

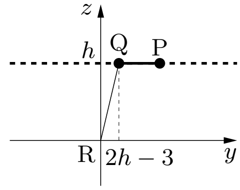


(ii) $0 \leqq 2h-3 \leqq 3 \left(すなわち\ \dfrac{3}{2} \leqq h \leqq 2\right)$ のとき

点 R と線分 PQ の距離 d は

$$d = \mathrm{RQ} = \sqrt{(2h-3)^2 + h^2} = \sqrt{5h^2 - 12h + 9}$$

である．



よって，点 $\mathrm{R}(h,\ 0,\ 0)$ と線分 PQ の距離 d は

$$\begin{cases} \boldsymbol{h} & \left(\boldsymbol{0 \leqq h \leqq \dfrac{3}{2}}\ \textbf{のとき}\right) \\ \boldsymbol{\sqrt{5h^2 - 12h + 9}} & \left(\boldsymbol{\dfrac{3}{2} \leqq h \leqq 2}\ \textbf{のとき}\right) \end{cases} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) 線分 PQ の中点の座標は $\left(h,\ \dfrac{h}{2},\ h\right)$ であり，つねに $0 \leqq \dfrac{h}{2}$ を満たすから，点 R と線分 PQ 上の点の距離の最大値は

$$\mathrm{RP} = \sqrt{(-h+3)^2 + h^2} = \sqrt{2h^2 - 6h + 9}$$

である．

三角形 ABC が通過する点全体からなる立体を平面 $x = h$ $(0 \leqq h \leqq 2)$ で切ったときの断面は，R を中心とする 2 つの円の間にはさまれたドーナツ型の領域になる．その外側の半径は RP であり，内側の半径は d である．

以上より，求める体積は

$$\begin{aligned}
&\int_0^{\frac{3}{2}} \pi \left\{ \left(\sqrt{2h^2 - 6h + 9}\right)^2 - h^2 \right\} dh \\
&\qquad + \int_{\frac{3}{2}}^{2} \pi \left\{ \left(\sqrt{2h^2 - 6h + 9}\right)^2 - \left(\sqrt{5h^2 - 12h + 9}\right)^2 \right\} dh \\
&= \pi \int_0^{\frac{3}{2}} (h^2 - 6h + 9)\, dh + \pi \int_{\frac{3}{2}}^{2} (-3h^2 + 6h)\, dh \\
&= \pi \left[\frac{(h-3)^3}{3} \right]_0^{\frac{3}{2}} + \pi \Big[-h^3 + 3h^2 \Big]_{\frac{3}{2}}^{2} \\
&= \frac{\pi}{3} \left(-\frac{27}{8} + 27 \right) + \pi \left(-8 + 12 + \frac{27}{8} - \frac{27}{4} \right) \\
&= \frac{63}{8}\pi + \left(4 - \frac{27}{8} \right) \pi \\
&= \boldsymbol{\frac{17}{2}\pi} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

である．