関数 $f(x)$ を

$$f(x) = -\frac{(\log x)^3}{x^2} \quad (x > 0)$$

とする．また，xy 平面上の曲線 $y = f(x)$ を C とおく．ただし，対数は自然対数とし，e は自然対数の底とする．次の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)$ の極値を求めよ．また，極値をとるときの x の値を求めよ．

(2) 曲線 C の接線のうち，原点を通る接線の方程式を求めよ．

(3) 曲線 C，x 軸，y 軸および直線 $y = f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ で囲まれた部分を，y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ．

(23 東京農工大 農・工 3)

【答】

(1) $x = e^{\frac{3}{2}}$ のとき，極小値 $-\dfrac{27}{8e^3}$

(2) $y = 0,\ y = -\dfrac{1}{e^3}x$

(3) $\dfrac{5}{32}\pi$

【解答】

$$f(x) = -\frac{(\log x)^3}{x^2} \quad (x > 0)$$

(1) $f(x)$ を微分すると

$$f'(x) = -\frac{3(\log x)^2 \cdot \frac{1}{x} \cdot x^2 - (\log x)^3 \cdot 2x}{x^4} = \frac{(\log x)^2(2\log x - 3)}{x^3}$$

$x > 0$ における $f(x)$ の増減は右表となる．

x	(0)	$\cdots$	1	$\cdots$	$e^{\frac{3}{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$
$f'(x)$		↘	0	↘		↗

よって，$f(x)$ は $\boldsymbol{x = e^{\frac{3}{2}}}$ **のとき** ……(答)

$$\text{極小値 } f\left(e^{\frac{3}{2}}\right) = -\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{e^3} = \boldsymbol{-\frac{27}{8e^3}}$$ ……(答)

をとる．

(2) 曲線 C 上の点 $(t,\ f(t))$ $(t > 0)$ における接線の方程式は

$$y = \frac{(\log t)^2(2\log t - 3)}{t^3}(x - t) - \frac{(\log t)^3}{t^2} \quad \cdots\cdots ①$$

である．① が原点を通る条件は

$$0 = \frac{(\log t)^2(2\log t - 3)}{t^3}(0 - t) - \frac{(\log t)^3}{t^2}$$

$$(\log t)^2(2\log t - 3) + (\log t)^3 = 0 \quad (\because\ t \fallingdotseq 0)$$

$$3(\log t)^2(\log t - 1) = 0$$

$$\therefore \quad t = 1,\ e$$

よって，原点を通る接線の方程式は

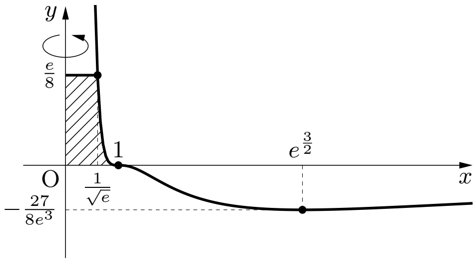
$$\boldsymbol{y = 0, \quad y = -\frac{1}{e^3}x}$$ ……(答)

である．

(3) $f(x)$ は $x>1$ で $f(x)<0$ であり

$$\lim_{x\to+0} f(x)=\infty$$

である．これに (1) の結果をあわせると，$y=f(x)$ のグラフは右のようになる．また



$$f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)=-\frac{(\log e^{-\frac{1}{2}})^3}{e^{-1}}=\frac{e}{8}$$

より，C，x 軸，y 軸および直線 $y=f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$ で囲まれた部分は上図の斜線部分である．これを y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V は

$$\begin{aligned}
V&=\pi\int_0^{\frac{e}{8}} x^2\,dy\\
&=\pi\int_1^{\frac{1}{\sqrt{e}}} x^2\cdot\frac{(\log x)^2(2\log x-3)}{x^3}\,dx\\
&=\pi\int_1^{\frac{1}{\sqrt{e}}}\{2(\log x)^3-3(\log x)^2\}(\log x)'\,dx\\
&=\pi\left[\frac{1}{2}(\log x)^4-(\log x)^3\right]_1^{\frac{1}{\sqrt{e}}}\\
&=\pi\left\{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^4-\left(-\frac{1}{2}\right)^3\right\}\\
&=\boldsymbol{\frac{5}{32}\pi}
\end{aligned}$$

……(答)

である．

- 次のように計算することもできる．

$$\begin{aligned}
V&=\pi\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^3\cdot\frac{e}{8}+2\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^1 x\cdot\left(-\frac{(\log x)^3}{x^2}\right)dx\\
&=\frac{\pi}{8}-2\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^1\frac{(\log x)^3}{x}\,dx\\
&=\frac{\pi}{8}-2\pi\left[\frac{(\log x)^4}{4}\right]_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^1\\
&=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{32}\\
&=\frac{5}{32}\pi
\end{aligned}$$

である．