以下の問いに答えなさい．

(1) 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} 2\theta\sin^2\theta\,d\theta$ を求めなさい．

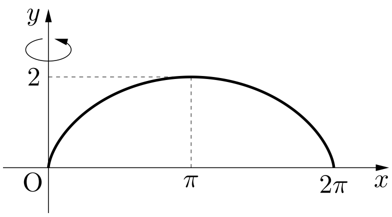
(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \theta^2\sin\theta\,d\theta$ を，必要ならば部分積分を 2 回行うことにより求めなさい．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^3\theta\,d\theta$ を求めなさい．

(4) サイクロイド

$$\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = 1 - \cos\theta \end{cases}$$

の $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の部分と x 軸で囲まれた図形を D とする．D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めなさい．



(23 東京都立大 後 理・都市環境・システムデザイン 2)

【答】

(1) $\displaystyle\int_0^{2\pi} 2\theta\sin^2\theta\,d\theta = 2\pi^2$

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \theta^2\sin\theta\,d\theta = -4\pi^2$

(3) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^3\theta\,d\theta$

(4) $V = 6\pi^3$

【解答】

(1) 半角の公式を用いると

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} 2\theta\sin^2\theta\,d\theta &= \int_0^{2\pi} \theta(1-\cos 2\theta)\,d\theta \\
&= \left[\frac{\theta^2}{2}\right]_0^{2\pi} - \left[\theta\cdot\frac{\sin 2\theta}{2}\right]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 1\cdot\frac{\sin 2\theta}{2}\,d\theta \\
&= 2\pi^2 - 0 + \left[-\frac{\cos 2\theta}{4}\right]_0^{2\pi} \\
&= \boldsymbol{2\pi^2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

(2) 部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \theta^2\sin\theta d\theta &= \Big[\theta^2(-\cos\theta)\Big]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2\theta\cdot(-\cos\theta)\,d\theta \\
&= -4\pi^2 + \Big[2\theta\sin\theta\Big]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} 2\cdot(-\sin\theta)\,d\theta \\
&= -4\pi^2 + 0 + 2\Big[\cos\theta\Big]_0^{2\pi} \\
&= \boldsymbol{-4\pi^2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

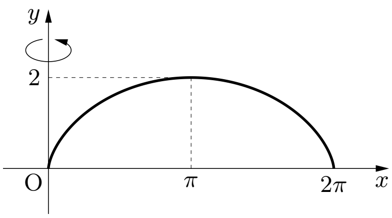
である．

(3) 置換積分法を用いると

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin^3\theta\,d\theta &= \int_0^{2\pi}(1-\cos^2\theta)\sin\theta\,d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi}(1-\cos^2\theta)(\cos\theta)'\,d\theta \\ &= -\left[\cos\theta - \frac{\cos^3\theta}{3}\right]_0^{2\pi} \\ &= 0\end{aligned}$$

である．

(4) サイクロイド



$$\begin{cases} x = \theta - \sin\theta \\ y = 1-\cos\theta \end{cases}$$

の $0 \leqq \theta \leqq \pi$ に対応する部分が定める y の関数

$$x = f_1(y)\ (0 \leqq y \leqq 2)$$

と，$\pi \leqq \theta \leqq 2\pi$ に対応する部分が定める y の関数

$$x = f_2(y)\ (0 \leqq y \leqq 2)$$

を用いると

$$V = \int_0^2 \pi(f_2(y))^2\,dy - \int_0^2 \pi(f_1(y))^2\,dy$$

となる．$y = 1-\cos\theta$ より $dy = \sin\theta\,d\theta$ であるから

$$\begin{aligned}V &= \int_{2\pi}^{\pi} \pi(\theta-\sin\theta)^2\sin\theta\,d\theta - \int_0^{\pi}\pi(\theta-\sin\theta)^2\sin\theta\,d\theta \\ &= -\int_0^{2\pi}\pi(\theta-\sin\theta)^2\sin\theta\,d\theta \\ &= -\pi\int_0^{2\pi}(\theta^2\sin\theta - 2\theta\sin^2\theta + \sin^3\theta)\,d\theta \\ &= -\pi(-4\pi^2 - 2\pi^2 + 0) \quad (\because\ (1), (2), (3)) \\ &= \boldsymbol{6\pi^3}\end{aligned}$$

……(答)

である．