$a,\ p$ を実数とする．曲線 $C : y = 2\log_e x$ が直線 $\ell : y = ax$ と点 $\mathrm{P}(p,\ ap)$ で接している．このとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 実数 $p,\ a$ の値を求めなさい．
(2) 曲線 $C$ と直線 $x = p$，$y = 0$ で囲まれた図形の面積 $S$ を求めなさい．
(3) 関数 $y = x(\log_e x)^2$ を $x$ について微分しなさい．
(4) 曲線 $C$ と直線 $\ell$，$y = 0$ で囲まれた図形を $x$ 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 $V$ を求めなさい．

(23 福島大 共生システム理工 4)

---

【答】

(1) $p = e,\ a = \dfrac{2}{e}$
(2) $S = 2$
(3) $y' = (\log_e x)^2 + 2\log_e x$
(4) $V = \dfrac{8}{3}\pi(3 - e)$

---

【解答】

$$C : y = 2\log_e x, \quad \ell : y = ax$$

(1) $f(x) = 2\log_e x,\ g(x) = ax$ とおく．$C$ が $\ell$ と点 $\mathrm{P}(p,\ ap)$ で接する条件は

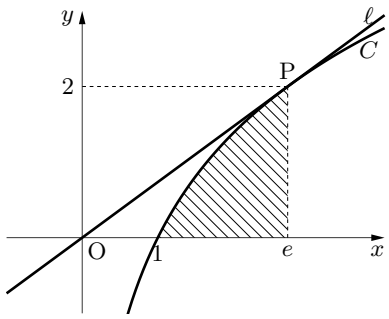
$$\begin{cases} f(p) = g(p) \\ f'(p) = g'(p) \end{cases} \iff \begin{cases} 2\log_e p = ap \\ \dfrac{2}{p} = a \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{2}{p} \\ 2\log_e p = 2 \end{cases}$$

であり，これを解くと

$$\boldsymbol{p = e, \quad a = \frac{2}{e}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 求める面積 $S$ は右図の斜線部分の面積である．




$$\begin{aligned} S &= \int_1^e 2\log_e x\,dx \\ &= 2\left(\Big[x\log_e x\Big]_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right) \\ &= 2\left(e - \Big[x\Big]_1^e\right) \\ &= 2(e - e + 1) \\ &= \boldsymbol{2} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

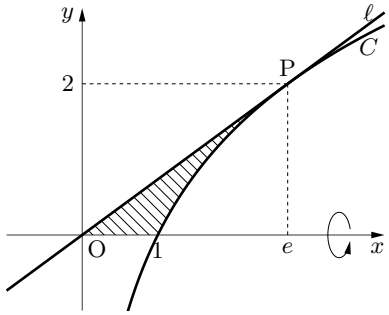
である．

(3) 積の微分法を用いると

$$\begin{aligned} y' &= \{x(\log_e x)^2\}' \\ &= 1\cdot(\log_e x)^2 + x\cdot\left\{2(\log_e x)\cdot\frac{1}{x}\right\} \\ &= \boldsymbol{(\log_e x)^2 + 2\log_e x} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

(4) 求める体積 $V$ は右図の斜線部分を $x$ 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積である．




$$
\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3}\cdot\pi 2^2\cdot e-\pi\int_1^e 4(\log_e x)^2\,dx \\
&= \frac{4}{3}\pi e-4\pi\int_1^e (y'-2\log_e x)\,dx \quad (\because\ (3)) \\
&= \frac{4}{3}\pi e-4\pi\left(\Big[x(\log_e x)^2\Big]_1^e-S\right) \quad (\because\ (2)) \\
&= \frac{4}{3}\pi e-4\pi(e-2) \\
&= \frac{4}{3}\pi(e-3e+6) \\
&= \boldsymbol{\frac{8}{3}\pi(3-e)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である．