

関数 $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ のグラフが、 $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で、 x 軸と交わる点の x 座標を p とする。以下の各問に答えよ。

- (1) p の値を求めよ。
- (2) $0 \leq x \leq p$ の範囲で、曲線 $y = f(x)$ 、 x 軸、および y 軸で囲まれた図形 D の面積 S を求めよ。
- (3) 前問 (2) で定めた図形 D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。

(23 茨城大工 4)

【答】

- (1) $p = \frac{3}{4}\pi$
- (2) $S = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$
- (3) $V = \left(\frac{3}{8}\pi + \frac{1}{4}\right)\pi$

【解答】

$$f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

- (1) $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ を $0 \leq x \leq \pi$ の範囲で解

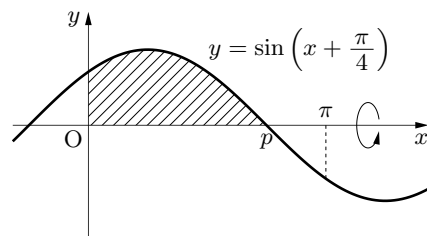
$$\text{く. } \frac{\pi}{4} \leq x + \frac{\pi}{4} \leq \frac{5}{4}\pi \text{ より}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = \pi$$

$$\therefore x = \frac{3}{4}\pi$$

よって、 x 軸と交わる点の x 座標 p の値は

$$p = \frac{3}{4}\pi \quad \dots\dots(\text{答})$$



である。

- (2) 図形 D は右図の斜線部分である。 D の面積 S は

$$S = \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx = \left[-\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right]_0^{\frac{3}{4}\pi} = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である。

- (3) 図形 D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \pi \sin^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) dx = \pi \int_0^{\frac{3}{4}\pi} \frac{1 - \cos 2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{2} dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{3}{4}\pi} (1 + \sin 2x) dx = \frac{\pi}{2} \left[x - \frac{1}{2} \cos 2x\right]_0^{\frac{3}{4}\pi} \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\frac{3}{4}\pi + \frac{1}{2}\right) = \left(\frac{3}{8}\pi + \frac{1}{4}\right)\pi \quad \dots\dots(\text{答}) \end{aligned}$$

である。