以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $y = x + 2\sin x$ の第 1 次導関数 y' と第 2 次導関数 y'' を求めよ．

(2) 関数 $y = x + 2\sin x\ \ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ の極値を求めよ．

(3) 不定積分 $\displaystyle\int x\sin x\,dx$ を求めよ．

(4) 曲線 $y = x + 2\sin x\ \ (0 \leqq x \leqq 2\pi)$ と直線 $y = x$ で囲まれた 2 つの部分を，それぞれ x 軸の周りに 1 回転させてできる 2 つの立体の体積の和 V を求めよ．

(23 豊橋技科大 3)

【答】

(1) $y' = 1 + 2\cos x,\quad y'' = -2\sin x$

(2) 極大値 $\dfrac{2}{3}\pi + \sqrt{3}$，極小値 $\dfrac{4}{3}\pi - \sqrt{3}$

(3) $-x\cos x + \sin x + C\quad (C$ は積分定数$)$

(4) $V = 16\pi^2$

【解答】

(1) $y = x + 2\sin x$ を微分すると

$$\boldsymbol{y' = 1 + 2\cos x}, \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$\boldsymbol{y'' = -2\sin x} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $0 \leqq x \leqq 2\pi$ において，$y' = 0$ となるのは

$$1 + 2\cos x = 0 \qquad \therefore\quad \cos x = -\frac{1}{2} \qquad \therefore\quad x = \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$$

$x = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$y'' = -\sqrt{3} < 0$ より，　**極大値** $\boldsymbol{\dfrac{2}{3}\pi + \sqrt{3}}$, ……(答)

$x = \dfrac{4}{3}\pi$ のとき，$y'' = \sqrt{3} > 0$ より，　**極小値** $\boldsymbol{\dfrac{4}{3}\pi - \sqrt{3}}$ ……(答)

をとる．

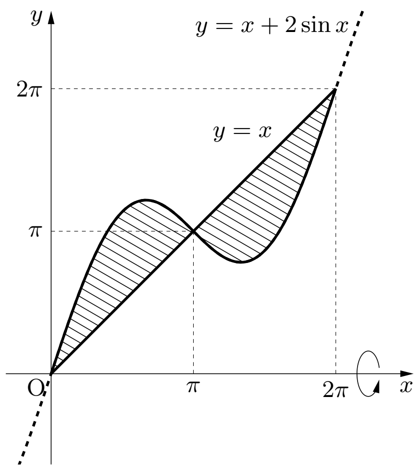
- 増減表をかいてもよいが，(1) で y'' を求めているので，これを利用した．

(3) 部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}\int x\sin x\,dx &= -x\cos x + \int 1\cdot\cos x\,dx \\ &= \boldsymbol{-x\cos x + \sin x + C}\quad (\boldsymbol{C}\ \textbf{は積分定数})\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) 曲線 $y = x + 2\sin x$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ と直線 $y = x$ の交点の x 座標は



$$x + 2\sin x = x$$
$$\therefore \quad \sin x = 0$$
$$\therefore \quad x = 0,\ \pi,\ 2\pi$$

であり，曲線と直線で囲まれた 2 つの部分は右図の斜線部分となる．求める体積 V は

$$\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^{\pi}\{(x+2\sin x)^2 - x^2\}\,dx \\
&\quad + \pi\int_{\pi}^{2\pi}\{x^2 - (x+2\sin x)^2\}\,dx \\
&= \pi\int_0^{\pi}(4x\sin x + 4\sin^2 x)\,dx \\
&\quad - \pi\int_{\pi}^{2\pi}(4x\sin x + 4\sin^2 x)\,dx \\
&= \pi\int_0^{\pi}(4x\sin x + 2 - 2\cos 2x)\,dx - \pi\int_{\pi}^{2\pi}(4x\sin x + 2 - 2\cos 2x)\,dx \\
&= \pi\Big[-4x\cos x + 4\sin x + 2x - \sin 2x\Big]_0^{\pi} - \pi\Big[-4x\cos x + 4\sin x + 2x - \sin 2x\Big]_{\pi}^{2\pi} \\
&= \pi(4\pi + 2\pi) - \pi(-8\pi + 4\pi - 4\pi - 2\pi) \\
&= 6\pi^2 + 10\pi^2 \\
&= \boldsymbol{16\pi^2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．