xy 平面において，2 点 A(3, 0)，B(−3, 0) からの距離の積が 12 に等しい点 P の軌跡を C とする．

(1) C は x 軸および，y 軸に関して対称であることを示せ．

(2) C と x 軸，C と y 軸との交点の座標をそれぞれ求めよ．

(3) 点 P の y 座標のとりうる値の範囲を求めよ．

(4) C で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(23 関西医大 4①)

【答】

(1) 略

(2) $\left(\pm\sqrt{21},\ 0\right)$，$\left(0,\ \pm\sqrt{3}\right)$

(3) $-2 \leqq y \leqq 2$

(4) $16\pi^2 + 10\sqrt{3}\pi$

【解答】

(1) P の座標を $(x,\ y)$ とおくと，2 点 A(3, 0)，B(−3, 0) からの距離の積 PA · PB が 12 に等しい点 P の軌跡 C は

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}\sqrt{(x+3)^2+y^2}=12 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす点 $(x,\ y)$ の集合である．

$$f(x,\ y)=\sqrt{(x-3)^2+y^2}\sqrt{(x+3)^2+y^2}-12$$

とおくと

$$\begin{aligned} f(x,\ -y) &= \sqrt{(x-3)^2+(-y)^2}\sqrt{(x+3)^2+(y)^2}-12 \\ &= \sqrt{(x-3)^2+y^2}\sqrt{(x+3)^2+y^2}-12 \\ &= f(x,\ y) \end{aligned}$$

であり，C は x 軸に関して対称である．　　……(証明終わり)

また

$$\begin{aligned} f(-x,\ y) &= \sqrt{(-x-3)^2+y^2}\sqrt{(-x+3)^2+y^2}-12 \\ &= \sqrt{(x+3)^2+y^2}\sqrt{(x-3)^2+y^2}-12 \\ &= f(x,\ y) \end{aligned}$$

であり，C は y 軸に関して対称である．　　……(証明終わり)

(2) C と x 軸との交点では

$$\sqrt{(x-3)^2+0^2}\sqrt{(x+3)^2+0^2}=12$$
$$|x-3||x+3|=12$$
$$x^2-9=\pm 12$$

$x^2 \geqq 0$ より，$x^2-9 \geqq -9$ であり

$$x^2-9=12 \qquad \therefore \quad x=\pm\sqrt{21}$$

よって，x 軸との交点の座標は

$$\left(\pm\boldsymbol{\sqrt{21}},\ \mathbf{0}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

C と y 軸との交点では

$$\sqrt{(0-3)^2+y^2}\sqrt{(0+3)^2+y^2}=12$$
$$9+y^2=12 \qquad \therefore \quad y=\pm\sqrt{3}$$

よって，y 軸との交点の座標は

$$\left(\mathbf{0},\ \pm\boldsymbol{\sqrt{3}}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) ① を変形すると

$$
\begin{aligned}
&① \iff \{(x-3)^2+y^2\}\{(x+3)^2+y^2\}=12^2\\
&(x^2-9)^2+\{(x-3)^2+(x+3)^2\}y^2+y^4=144\\
&(x^4-18x^2+81)+(2x^2+18)y^2+y^4-144=0\\
&y^4+2(x^2+9)y^2+x^4-18x^2-63=0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\quad y^2 &= -x^2-9\pm\sqrt{(x^2+9)^2-(x^4-18x^2-63)}\\
&= -x^2-9\pm\sqrt{36x^2+144}\\
&= -x^2-9\pm 6\sqrt{x^2+4}
\end{aligned}
$$

$y^2 \geqq 0$ より

$$y^2=-x^2-9+6\sqrt{x^2+4}$$

である．$g(x)=-x^2-9+6\sqrt{x^2+4}$ とおき，$g(x)$ の動く範囲を調べる．まず，$y^2 \geqq 0$ より

$$
\begin{aligned}
&6\sqrt{x^2+4} \geqq x^2+9 \iff 36(x^2+4) \geqq (x^2+9)^2\\
&36(x^2+4) \geqq x^4+18x^2+81\\
&x^4-18x^2-63 \leqq 0\\
&(x^2-21)(x^2+3) \leqq 0
\end{aligned}
$$

$x^2 \geqq 0$ より，つねに $x^2+3 \geqq 0$ であるから

$$0 \leqq x^2 \leqq 21 \qquad \therefore\quad -\sqrt{21} \leqq x \leqq \sqrt{21}$$

C は y 軸に関して対称であるから，$0 \leqq x \leqq \sqrt{21}$ における $g(x)$ の増減を調べればよい．

$$
\begin{aligned}
g'(x) &= -2x+6\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}\cdot 2x = \frac{-2x(\sqrt{x^2+4})+6x}{\sqrt{x^2+4}}\\
&= \frac{2x(3-\sqrt{x^2+4})}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{2x(5-x^2)}{\sqrt{x^2+4}\,(3+\sqrt{x^2+4})}
\end{aligned}
$$

$g'(x)$ の符号は，分子 $2x(5-x^2)$ の符号と一定するから，$0 \leqq x \leqq \sqrt{21}$ における $g(x)$ の増減は下表となる．

x	0	$\cdots$	$\sqrt{5}$	$\cdots$	$\sqrt{21}$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	3	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

$0 \leqq g(x) \leqq 4$ より $0 \leqq y^2 \leqq 4$ であり，C は x 軸に関しても対称であるから

$$\boldsymbol{-2 \leqq y \leqq 2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- y のとりうる値の範囲は，① を満たす実数 x が存在するような実数 y の値の範囲である．

$$
\begin{aligned}
&① \iff \{(x-3)^2+y^2\}\{(x+3)^2+y^2\}=12^2\\
&(x^2-9)^2+\{(x-3)^2+(x+3)^2\}y^2+y^4=144\\
&(x^4-18x^2+81)+(2x^2+18)y^2+y^4-144=0\\
&x^4+(2y^2-18)x^2+y^4+18y^2-63=0
\end{aligned}
$$

$x^2=t$ とおくと，① は t についての 2 次方程式

$$t^2+(2y^2-18)t+y^4+18y^2-63=0 \qquad \cdots\cdots ①'$$

である．判別式を D とおくと

$$\begin{aligned}\frac{D}{4} &= (y^2-9)^2-(y^4+18y^2-63)\\ &= -36y^2+144\\ &= -36(y^2-4)\end{aligned}$$

であり，$D \geqq 0$ が必要である．

$$y^2-4 \leqq 0 \qquad \therefore \quad -2 \leqq y \leqq 2$$

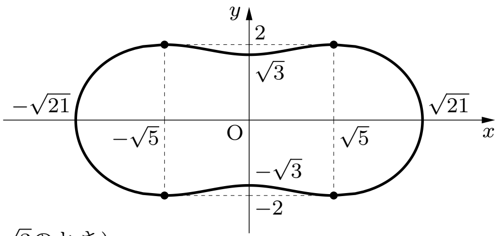
このとき，軸の方程式 $t = 18-y^2 > 0$ であり，つねに ①$'$ を満たす正の実数 t が存在し，① を満たす実数 x が存在する．

よって，求める y のとりうる値の範囲は

$$\boldsymbol{-2 \leqq y \leqq 2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) (3) の考察と C の対称性より C の概形は右図となる．



① を x^2 について解くと

$$x^2 = 9-y^2 \pm 6\sqrt{4-y^2}$$

となる．$x^2 \geqq 0$ に注意すると，C の方程式は

$$x^2 = \begin{cases} 9-y^2+6\sqrt{4-y^2} & (0 \leqq y \leqq \sqrt{3}\text{のとき}) \\ 9-y^2 \pm 6\sqrt{4-y^2} & (\sqrt{3} \leqq y \leqq 2\text{ のとき}) \end{cases}$$

である．C で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は

$$\begin{aligned}V &= 2\pi\int_0^2 (9-y^2+6\sqrt{4-y^2})\,dy - 2\pi\int_{\sqrt{3}}^2 (9-y^2-6\sqrt{4-y^2})\,dy\\ &= 2\pi\int_0^{\sqrt{3}}(9-y^2)\,dy + 12\pi\int_0^2\sqrt{4-y^2}\,dy + 12\pi\int_{\sqrt{3}}^2\sqrt{4-y^2}\,dy\end{aligned}$$

ここで

$$\int_0^{\sqrt{3}}(9-y^2)\,dy = \left[9y-\frac{y^3}{3}\right]_0^{\sqrt{3}} = 9\sqrt{3}-\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$$

$$\int_0^2\sqrt{4-y^2}\,dy = (\text{半径 2 の四分の一円の面積}) = \frac{1}{4}\cdot\pi 2^2 = \pi$$

$$\begin{aligned}\int_{\sqrt{3}}^2\sqrt{4-y^2}\,dy &= \left(\text{半径 2，円周角}\frac{\pi}{6}\text{の扇形の面積}\right)\\ &\qquad - (\text{底辺}\sqrt{3}\text{，高さ 1 の三角形の面積})\\ &= \frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{6} - \frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot 1\\ &= \frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}V &= 2\pi\times 8\sqrt{3} + 12\pi\times\pi + 12\pi\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= 16\sqrt{3}\pi + 12\pi^2 + 4\pi^2 - 6\sqrt{3}\pi\\ &= \boldsymbol{16\pi^2 + 10\sqrt{3}\pi}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．