xy 平面において，2 点 $\mathrm{A}(3,\ 0)$，$\mathrm{B}(-3,\ 0)$ からの距離の積が 12 に等しい点 P の軌跡を C とする．

(1) C は x 軸および，y 軸に関して対称であることを示せ．
(2) C と x 軸との交点の座標を求めよ．
(3) $f(x)=\log(x+\sqrt{x^2+4})$ とするとき，$f'(x)$ を求めよ．また，不定積分 $\displaystyle\int 2\sqrt{x^2+4}\,dx$ を求めよ．
(4) C で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ．

(23 関西医大 4②)

【答】

(1) 略
(2) $(\pm\sqrt{21},\ 0)$，$(0,\ \pm\sqrt{3})$
(3) $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+4}}$，$\displaystyle\int 2\sqrt{x^2+4}\,dx = x\sqrt{x^2+4}+4\log(x+\sqrt{x^2+4})+D$ (D は積分定数)
(4) $\left(24\log\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}-2\sqrt{21}\right)\pi$

【解答】

(1) P の座標を $(x,\ y)$ とおくと，2 点 $\mathrm{A}(3,\ 0)$，$\mathrm{B}(-3,\ 0)$ からの距離の積 $\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}$ が 12 に等しい点 P の軌跡 C は

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}\sqrt{(x+3)^2+y^2}=12 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす点 $(x,\ y)$ の集合である．

$$f(x,\ y)=\sqrt{(x-3)^2+y^2}\sqrt{(x+3)^2+y^2}-12$$

とおくと

$$\begin{aligned} f(x,\ -y) &= \sqrt{(x-3)^2+(-y)^2}\sqrt{(x+3)^2+(y)^2}-12 \\ &= \sqrt{(x-3)^2+y^2}\sqrt{(x+3)^2+y^2}-12 \\ &= f(x,\ y) \end{aligned}$$

であり，C は x 軸に関して対称である． ……(証明終わり)

また

$$\begin{aligned} f(-x,\ y) &= \sqrt{(-x-3)^2+y^2}\sqrt{(-x+3)^2+y^2}-12 \\ &= \sqrt{(x+3)^2+y^2}\sqrt{(x-3)^2+y^2}-12 \\ &= f(x,\ y) \end{aligned}$$

であり，C は y 軸に関して対称である． ……(証明終わり)

(2) C と x 軸との交点では

$$\sqrt{(x-3)^2+0^2}\sqrt{(x+3)^2+0^2}=12$$
$$|x-3||x+3|=12$$
$$x^2-9=\pm 12$$

$x^2\geqq 0$ より，$x^2-9\geqq -9$ であり

$$x^2-9=12 \qquad \therefore\quad x=\pm\sqrt{21}$$

よって，x 軸との交点の座標は

$$\boldsymbol{(\pm\sqrt{21},\ 0)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

C と y 軸との交点では

$$\sqrt{(0-3)^2+y^2}\sqrt{(0+3)^2+y^2}=12$$
$$9+y^2=12 \qquad \therefore \quad y=\pm\sqrt{3}$$

よって，y 軸との交点の座標は

$$\boldsymbol{(0,\ \pm\sqrt{3})} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $f(x)=\log(x+\sqrt{x^2+4})$ のとき

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x+\sqrt{x^2+4}}\cdot\left(1+\frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}\cdot 2x\right)\\
&= \frac{\sqrt{x^2+4}+x}{(x+\sqrt{x^2+4})\sqrt{x^2+4}}\\
&= \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{x^2+4}}} \qquad \cdots\cdots(答)
\end{aligned}$$

である．

つぎに $\displaystyle\int 2\sqrt{x^2+4}\,dx$ を求める．$t=x+\sqrt{x^2+4}$ とおくと

$$(t-x)^2=x^2+4 \qquad \therefore \quad t^2-2tx=4 \qquad \therefore \quad x=\frac{t^2-4}{2t}$$

であり

$$dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{2t\cdot t-(t^2-4)\cdot 1}{t^2}\,dt=\frac{t^2+4}{2t^2}\,dt$$

であるから

$$\begin{aligned}
&\int 2\sqrt{x^2+4}\,dx=\int 2(t-x)\,dx\\
&=\int 2\left(t-\frac{t^2-4}{2t}\right)\cdot\frac{t^2+4}{2t^2}\,dt\\
&=\int\frac{(t^2+4)(t^2+4)}{2t^3}\,dt=\int\left(\frac{t}{2}+\frac{4}{t}+\frac{8}{t^3}\right)dt\\
&=\frac{t^2}{4}+4\log|t|-\frac{4}{t^2}+D \quad (D\ は積分定数)\\
&=\frac{(x+\sqrt{x^2+4})^2}{4}-\frac{4}{(x+\sqrt{x^2+4})^2}+4\log\left|x+\sqrt{x^2+4}\right|+D\\
&=\frac{(\sqrt{x^2+4}+x)^2}{4}-\frac{4(\sqrt{x^2+4}-x)^2}{16}+4\log(x+\sqrt{x^2+4})+D\\
&=\frac{2x^2+4+2x\sqrt{x^2+4}}{4}-\frac{2x^2+4-2x\sqrt{x^2+4}}{4}+4\log(x+\sqrt{x^2+4})+D\\
&=x\sqrt{x^2+4}+4\log(x+\sqrt{x^2+4})+D
\end{aligned}$$

である．

- 部分積分法を用いると

$$\begin{aligned}
\int\sqrt{x^2+4}\,dx &= x\sqrt{x^2+4}-\int x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+4}}\cdot 2x\,dx\\
&= x\sqrt{x^2+4}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\,dx\\
&= x\sqrt{x^2+4}-\int\frac{(x^2+4)-4}{\sqrt{x^2+4}}\,dx\\
&= x\sqrt{x^2+4}-\int\sqrt{x^2+4}\,dx+\int\frac{4}{\sqrt{x^2+4}}\,dx
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad 2\int \sqrt{x^2+4}\,dx = x\sqrt{x^2+4} + \int \frac{4}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$$

前半の微分より

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx = \log(x+\sqrt{x^2+4}) + D \ (D \text{ は積分定数})$$

であるから

$$2\int \sqrt{x^2+4}\,dx = x\sqrt{x^2+4} + 4\log(x+\sqrt{x^2+4}) + D$$

である．

(4) ① を変形すると

$$\text{①} \iff \{(x-3)^2+y^2\}\{(x+3)^2+y^2\} = 12^2$$
$$(x^2-9)^2 + \{(x-3)^2+(x+3)^2\}y^2 + y^4 = 144$$
$$(x^4-18x^2+81) + (2x^2+18)y^2 + y^4 - 144 = 0$$
$$y^4 + 2(x^2+9)y^2 + x^4 - 18x^2 - 63 = 0$$

$$\begin{aligned}\therefore \quad y^2 &= -x^2 - 9 \pm \sqrt{(x^2+9)^2 - (x^4-18x^2-63)} \\ &= -x^2 - 9 \pm \sqrt{36x^2+144} \\ &= -x^2 - 9 \pm 6\sqrt{x^2+4}\end{aligned}$$

$y^2 \geqq 0$ より

$$y^2 = -x^2 - 9 + 6\sqrt{x^2+4}$$

である．このとき

$$-x^2 - 9 + 6\sqrt{x^2+4} \geqq 0 \iff 36(x^2+4) \geqq (x^2+9)^2$$
$$36(x^2+4) \geqq x^4 + 18x^2 + 81$$
$$x^4 - 18x^2 - 63 \leqq 0$$
$$(x^2-21)(x^2+3) \leqq 0$$

$x^2 \geqq 0$ より，つねに $x^2+3 \geqq 0$ であるから

$$0 \leqq x^2 \leqq 21 \qquad \therefore \quad -\sqrt{21} \leqq x \leqq \sqrt{21}$$

である．C で囲まれた図形は y 軸に関して対称であるから，求める体積 V は

$$\begin{aligned}V &= 2\pi\int_0^{\sqrt{21}} (-x^2 - 9 + 6\sqrt{x^2+4})\,dx \\ &= 2\pi\left[-\frac{x^3}{3} - 9x + 3x\sqrt{x^2+4} + 12\log(x+\sqrt{x^2+4})\right]_0^{\sqrt{21}} \\ &= 2\pi\left\{-7\sqrt{21} - 9\sqrt{21} + 15\sqrt{21} + 12\log(\sqrt{21}+5) - 12\log 2\right\} \\ &= \boldsymbol{\left(24\log\frac{5+\sqrt{21}}{2} - 2\sqrt{21}\right)\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．