$0 \leqq x \leqq 1$ で定義された関数

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} + \frac{x}{2} - 1$$

を考える．以下の問いに答えよ．

(1) $0 < x < 1$ における $f(x) = 0$ の解を求めよ．
(2) 第 2 次導関数 $f''(x)$ を求めよ．
(3) $0 < x < 1$ における $f(x)$ の極値を求めよ．
(4) 次の 2 つの不定積分 I, J を求めよ．ただし，積分定数は省略してもよい．

$$I = \int x\sqrt{1-x^2}\,dx, \quad J = \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

(5) 曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分を，y 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積 V を求めよ．

(23 電気通信大 後 2)

【答】

(1) $x = \dfrac{4}{5}$

(2) $f''(x) = -(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}$

(3) $x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，極大値 $\dfrac{\sqrt{5}}{2} - 1$

(4) $I = -\dfrac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}$，$J = -\dfrac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}$　(積分定数は省略)

(5) $V = \dfrac{4}{75}\pi$

【解答】

$$f(x) = \sqrt{1-x^2} + \frac{x}{2} - 1 \quad (0 \leqq x \leqq 1)$$

(1) $0 < x < 1$ における $\sqrt{1-x^2} + \dfrac{x}{2} - 1 = 0$ の解は

$$2\sqrt{1-x^2} = 2 - x \iff 4(1-x^2) = x^2 - 4x + 4$$
$$\therefore \quad 5x^2 - 4x = 0$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{x = \frac{4}{5}} \quad (\because\ 0 < x < 1) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 微分すると

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) + \frac{1}{2} = -x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= -1 \cdot (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - x \cdot \left\{-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}(-2x)\right\} \\ &= -(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} - x^2(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= -\{(1-x^2) + x^2\}(1-x^2)^{-\frac{3}{2}} \\ &= \boldsymbol{-(1-x^2)^{-\frac{3}{2}}} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．

(3) $0<x<1$ において $f'(x)=0$ を満たすのは

$$x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2} \iff 2x=\sqrt{1-x^2} \iff 4x^2=1-x^2$$
$$\therefore \quad x=\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (\because\ 0<x<1)$$

である．また

$$f''\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=-\left(1-\frac{1}{5}\right)^{\frac{3}{2}}<0$$
$$f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=\sqrt{1-\frac{1}{5}}+\frac{1}{2\sqrt{5}}-1=\frac{2\sqrt{5}}{5}+\frac{\sqrt{5}}{10}-1=\frac{\sqrt{5}}{2}-1$$

であるから，$f(x)$ は

$$\boldsymbol{x=\frac{1}{\sqrt{5}}}\text{ **のとき，極大値** }\boldsymbol{\frac{\sqrt{5}}{2}-1} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

(4) 置換積分法を用いる．

$$\begin{aligned}I&=\int x\sqrt{1-x^2}\,dx\\&=-\frac{1}{2}\int(1-x^2)^{\frac{1}{2}}(1-x^2)'\,dx\\&=-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} \quad (\because\ \text{積分定数は省略})\\&=\boldsymbol{-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

J については $\sqrt{1-x^2}=t$ とおくと

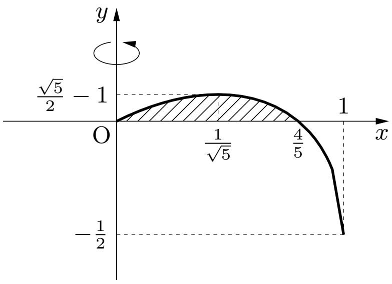
$$1-x^2=t^2 \qquad \therefore \quad -2x\,dx=2t\,dt \qquad \therefore \quad x\,dx=-t\,dt$$

であるから

$$\begin{aligned}J&=\int\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,dx\\&=\int\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\cdot x\,dx\\&=\int\frac{1-t^2}{t}\cdot(-t)\,dt\\&=\int(t^2-1)\,dt\\&=\frac{t^3}{3}-t \quad (\because\ \text{積分定数は省略})\\&=\frac{t}{3}(t^2-3)\\&=\frac{\sqrt{1-x^2}}{3}(1-x^2-3)\\&=\boldsymbol{-\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

である．

(5) (1)，(3) より，曲線 $y=f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ と x 軸で囲まれた部分は，次の右図の斜線部分である．



曲線 $y=f(x)$ 上に，点 $(x_1,\ y)$，$(x_2,\ y)$ を $0 \leqq x_1 \leqq \dfrac{1}{\sqrt{5}} \leqq x_2 \leqq \dfrac{4}{5}$ としてとる．

$\dfrac{dy}{dx}=f'(x)$ より $dy=f'(x)dx$ であるから

$$
\begin{aligned}
V &= \int_0^{\frac{\sqrt{5}}{2}-1} (\pi {x_2}^2 - \pi {x_1}^2)\,dy \\
&= \pi \left(\int_{\frac{4}{5}}^{\frac{1}{\sqrt{5}}} {x_2}^2 f'(x_2)\,dx_2 - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} {x_1}^2 f'(x_1)\,dx_1 \right) \\
&= \pi \left(-\int_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{4}{5}} x^2 f'(x)\,dx - \int_0^{\frac{1}{\sqrt{5}}} x^2 f'(x)\,dx \right) \\
&= -\pi \int_0^{\frac{4}{5}} x^2 \left(-x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \right) dx \\
&= \pi \int_0^{\frac{4}{5}} \left(\frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{x^2}{2} \right) dx \\
&= \pi \left[-\frac{1}{3}(x^2+2)\sqrt{1-x^2} - \frac{x^3}{6} \right]_0^{\frac{4}{5}} \qquad (\because\ (4) \text{ の } J) \\
&= \pi \left\{ -\frac{1}{3}\left(\frac{16}{25}+2\right)\sqrt{1-\frac{16}{25}} - \frac{1}{6}\left(\frac{4}{5}\right)^3 - \left(-\frac{2}{3}\right) \right\} \\
&= \pi \left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{66}{25} \cdot \frac{3}{5} - \frac{32}{3 \cdot 5^3} + \frac{2}{3} \right) \\
&= \frac{-198-32+250}{3 \cdot 5^3}\pi \\
&= \boldsymbol{\frac{4}{75}\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である．

- $0 < a \leqq x \leqq b$ において $f(x) \geqq 0$ であるとき，曲線 $y=f(x)$ の $a \leqq x \leqq b$ の部分と x 軸で挟まれた部分を y 軸の周りに 1 回転してできる図形の体積 V は

$$
V = \int_a^b 2\pi x f(x)\,dx
$$

で求められる．これを用いると

$$
\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^{\frac{4}{5}} x \left(\sqrt{1-x^2} + \frac{x}{2} - 1 \right) dx \\
&= 2\pi \left[-\frac{1}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}} + \frac{x^3}{6} - \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{4}{5}} \qquad (\because\ (4) \text{ の } I) \\
&= 2\pi \left\{ -\frac{1}{3}\left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{6}\left(\frac{4}{5}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) \right\} \\
&= 2\pi \left(-\frac{27}{3 \cdot 5^3} + \frac{32}{3 \cdot 5^3} - \frac{8}{5^2} + \frac{1}{3} \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{1}{3 \cdot 5^2} - \frac{24}{3 \cdot 5^2} + \frac{25}{3 \cdot 5^2} \right) \\
&= 2\pi \cdot \frac{2}{75} \\
&= \frac{4}{75}\pi
\end{aligned}
$$

である．