xy 平面上において，曲線 $C: y=\sqrt{x}$ と，直線 $\ell: y=x$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) C と ℓ で囲まれる図形の面積を求めよ．

(2) 曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(x,\ \sqrt{x})$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ に対し，点 P から直線 ℓ に下ろした垂線と，直線 ℓ との交点を Q とする．線分 PQ の長さを x を用いて表せ．

(3) C と ℓ で囲まれる図形を直線 ℓ の周りに一回転してできる立体の体積を求めよ．

(23 鳥取大 医・工 3)

【答】

(1) $\dfrac{1}{6}$

(2) $\mathrm{PQ}=\dfrac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2}}$

(3) $\dfrac{\sqrt{2}}{60}\pi$

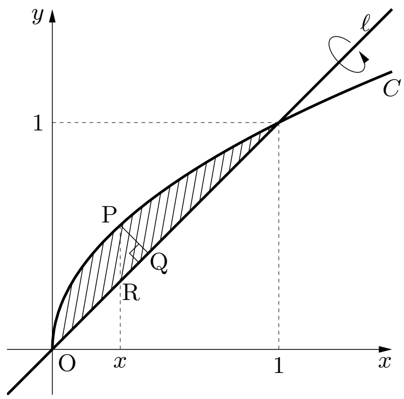
【解答】

$$C: y=\sqrt{x}, \quad \ell: y=x$$

(1) C と ℓ の交点の x 座標は

$$\sqrt{x}=x \qquad \therefore \quad \sqrt{x}(\sqrt{x}-1)=0$$
$$\therefore \quad x=0,\ 1$$

である．C と ℓ で囲まれる図形は右図の斜線部分であり，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，$\sqrt{x} \geqq x$ であるから，面積 S は



$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (\sqrt{x}-x)\,dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3}-\frac{1}{2} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{6}} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．

(2) $\mathrm{P}(x,\ \sqrt{x})$ $(0 \leqq x \leqq 1)$ と $\ell: x-y=0$ との距離 PQ は

$$\mathrm{PQ}=\frac{|x-\sqrt{x}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) 求める体積を V とおくと

$$V=\int_0^{\sqrt{2}} \pi \mathrm{PQ}^2\, d\mathrm{OQ}$$

である．P から x 軸に下ろした垂線と l との交点を R とおくと

$$\mathrm{OQ}=\mathrm{OR}+\mathrm{RQ}=\sqrt{2}x+\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2}}=\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{2}}$$

であり

$$d\mathrm{OQ}=\frac{1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{2}}\,dx=\frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{2}\sqrt{x}}\,dx \qquad \begin{array}{c|ccc} \mathrm{OQ} & 0 & \longrightarrow & \sqrt{2} \\ \hline x & 0 & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

であるから

$$
\begin{aligned}
V &= \pi\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2}}\right)^2 \frac{2\sqrt{x}+1}{2\sqrt{2}\sqrt{x}}\,dx \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\int_0^1 \frac{x(1-\sqrt{x})^2(2\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}}\,dx \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\int_0^1 \sqrt{x}(2x\sqrt{x}-3x+1)\,dx \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\int_0^1 (2x^2-3x\sqrt{x}+\sqrt{x})\,dx \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\left[\frac{2}{3}x^3-\frac{6}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{15} \\
&= \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{60}\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である．

- Δx が十分小さいとき，幅が Δx の板が回転してできる円錐を切り開くと，右下図のような扇形が得られる．この扇形の弧の長さは円錐の底円の周の長さと一致するから

  $$2\pi\mathrm{PQ}$$

  であり，微小体積 ΔV は

  $$
  \begin{aligned}
  \Delta V &= (\text{扇形の面積})\cdot\Delta x \\
  &= \frac{1}{2}(\text{扇形の弧の長さ})\mathrm{PR}\cdot\Delta x \\
  &= \frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{PQ}\cdot\sqrt{2}\mathrm{PQ}\cdot\Delta x \\
  &= \sqrt{2}\pi\mathrm{PQ}^2\Delta x
  \end{aligned}
  $$

  であるから，求める体積 V は

  $$
  \begin{aligned}
  V &= \sqrt{2}\pi\int_0^1\left(\frac{\sqrt{x}-x}{\sqrt{2}}\right)^2 dx \\
  &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1 (x-2x\sqrt{x}+x^2)\,dx \\
  &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{4}{5}x^{\frac{5}{2}}+\frac{x^3}{3}\right]_0^1 \\
  &= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{30} \\
  &= \frac{\sqrt{2}}{60}\pi
  \end{aligned}
  $$

  である．