関数

$$f(x) = \left| \cos x - \sqrt{5} \sin x - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right|$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $f(x)$ の最大値を求めよ．

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ を求めよ．

(3) $S(t) = \displaystyle\int_t^{t+\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$ とおく．このとき $S(t)$ の最大値を求めよ．

(23 千葉大 7)

【答】

(1) $\sqrt{6} + \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

(2) $2\sqrt{6} + 2\sqrt{2}\pi$

(3) $\sqrt{6} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$

【解答】

$$f(x) = \left| \cos x - \sqrt{5} \sin x - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right|$$

(1)

$$\begin{aligned} \cos x - \sqrt{5}\sin x &= \sqrt{6}\left(\frac{1}{\sqrt{6}}\cos x - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\sin x \right) \\ &= \sqrt{6}\cos(x+\alpha) \end{aligned}$$

となる．ただし，α は $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$，$\sin\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たすものとする．

$$\begin{aligned} f(x) &= \left| \sqrt{6}\cos(x+\alpha) - \frac{3\sqrt{2}}{2} \right| \\ &= \sqrt{6}\left| \cos(x+\alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \end{aligned}$$

x は実数全体を動くから $-1 \leqq \cos(x+\alpha) \leqq 1$ であり

$$-1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos(x+\alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2} \leqq 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore\quad 0 \leqq \left| \cos(x+\alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2} \right| \leqq 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

である．よって，$f(x)$ の最大値は

$$\sqrt{6}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \boldsymbol{\sqrt{6} + \frac{3\sqrt{2}}{2}}$$ ……(答)

である．

(2) 積分区間は $0 \leqq x \leqq 2\pi$ であり，このとき

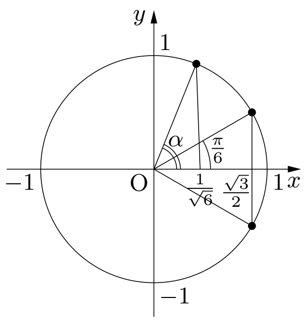
$$\alpha \leqq x + \alpha \leqq 2\pi + \alpha$$

であるから

$$\cos(x+\alpha) - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

となるのは $0 < \dfrac{\pi}{6} < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ に注意すると

$$x + \alpha = 2\pi \pm \frac{\pi}{6}$$



であり

$$\alpha \leqq x+\alpha \leqq \frac{11}{6}\pi,\ \frac{13}{6}\pi \leqq x+\alpha \leqq 2\pi+\alpha \text{ のとき} \quad \cos(x+\alpha)-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq 0$$

$$\frac{11}{6}\pi \leqq x+\alpha \leqq \frac{13}{6}\pi \text{ のとき} \quad \cos(x+\alpha)-\frac{\sqrt{3}}{2} \geqq 0$$

である．

$x+\alpha=u$ とおくと

$$dx=du \qquad \begin{array}{c|ccc} x & 0 & \longrightarrow & 2\pi \\ \hline u & \alpha & \longrightarrow & 2\pi+\alpha \end{array}$$

であるから

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=\int_\alpha^{2\pi+\alpha}\sqrt{6}\left|\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|du$$

となる．ここで

$$\begin{aligned}
&\int_\alpha^{2\pi+\alpha}\left|\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|du \\
&=-\int_\alpha^{\frac{11}{6}\pi}\left(\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)du+\int_{\frac{11}{6}\pi}^{\frac{13}{6}\pi}\left(\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)du-\int_{\frac{13}{6}\pi}^{2\pi+\alpha}\left(\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)du \\
&=-\left[\sin u-\frac{\sqrt{3}}{2}u\right]_\alpha^{\frac{11}{6}\pi}+\left[\sin u-\frac{\sqrt{3}}{2}u\right]_{\frac{11}{6}\pi}^{\frac{13}{6}\pi}-\left[\sin u-\frac{\sqrt{3}}{2}u\right]_{\frac{13}{6}\pi}^{2\pi+\alpha} \\
&=-2\times\left(\sin\frac{11}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{11}{6}\pi\right)+\left(\sin\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right) \\
&\quad+2\times\left(\sin\frac{13}{6}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{13}{6}\pi\right)-\left\{\sin(2\pi+\alpha)-\frac{\sqrt{3}}{2}(2\pi+\alpha)\right\} \\
&=-2\times\left(-\frac{1}{2}-\frac{11\sqrt{3}}{12}\pi\right)+\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\alpha\right) \\
&\quad+2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{13\sqrt{3}}{12}\pi\right)-\left\{\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}-\frac{\sqrt{3}}{2}(2\pi+\alpha)\right\} \\
&=2-\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\sqrt{3}\pi \\
&=2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi
\end{aligned}$$

であるから

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=\sqrt{6}\left(2+\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi\right)=\boldsymbol{2\sqrt{6}+2\sqrt{2}\pi} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $$S(t)=\int_t^{t+\frac{\pi}{3}} f(x)\,dx$$

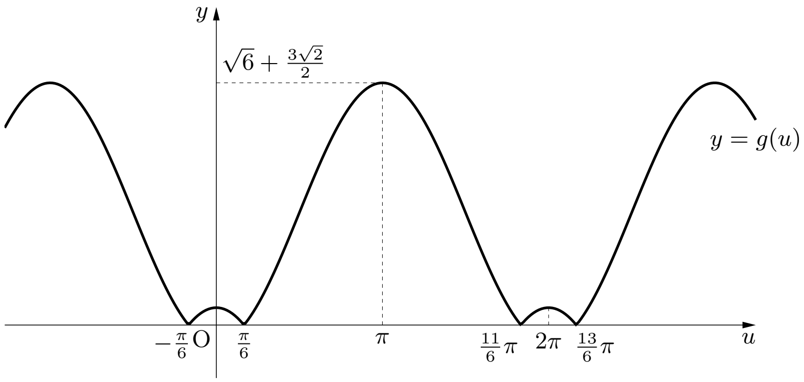
$x+\alpha=u$ とおくと

$$dx=du \qquad \begin{array}{c|ccc} x & t & \longrightarrow & t+\frac{\pi}{3} \\ \hline u & t+\alpha & \longrightarrow & t+\frac{\pi}{3}+\alpha \end{array}$$

であるから

$$S(t)=\int_{t+\alpha}^{t+\frac{\pi}{3}+\alpha}\sqrt{6}\left|\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right|du$$

$g(u)=\sqrt{6}\left|\cos u-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|$ とおくと，$y=g(u)$ のグラフは次図となる．



$g(u)$ は周期 2π の関数であり，$y=g(u)$ のグラフは直線 $u=\pi$ に関して対称であるから，$S(t)$ の最大値は $0 \leqq t \leqq \pi$ の範囲で考えればよい．$0 \leqq t \leqq \pi$ のとき

$$\alpha \leqq t+\alpha \leqq \pi+\alpha$$
$$\alpha+\frac{\pi}{3} \leqq t+\frac{\pi}{3}+\alpha \leqq \frac{4}{3}\pi+\alpha < \frac{4}{3}\pi+\frac{\pi}{2} = \frac{11}{6}\pi$$

であり

$$\frac{\pi}{6} < \alpha \leqq t+\alpha < t+\frac{\pi}{3}+\alpha < \frac{11}{6}\pi$$

である．したがって

$$\begin{aligned}
S(t) &= -\sqrt{6}\int_{t+\alpha}^{t+\frac{\pi}{3}+\alpha}\left(\cos u-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)du \\
&= -\sqrt{6}\left[\sin u-\frac{\sqrt{3}}{2}t\right]_{t+\alpha}^{t+\frac{\pi}{3}+\alpha} \\
&= -\sqrt{6}\left\{\sin\left(t+\frac{\pi}{3}+\alpha\right)-\sin(t+\alpha)-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{3}\right\} \\
&= -\sqrt{6}\left\{2\cos\left(t+\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\sin\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right\} \\
&= -\sqrt{6}\left\{\cos\left(t+\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right\}
\end{aligned}$$

となる．$0 \leqq t \leqq \pi$ より $\frac{\pi}{6}+\alpha \leqq t+\frac{\pi}{6}+\alpha \leqq \frac{7}{6}\pi+\alpha$ であり，$\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ であるから

$$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6} < \frac{\pi}{6}+\alpha < \frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2} \qquad \therefore\quad \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{6}+\alpha < \frac{2}{3}\pi,$$
$$\frac{7}{6}\pi+\frac{\pi}{6} < \frac{7}{6}\pi+\alpha < \frac{7}{6}\pi+\frac{\pi}{2} \qquad \therefore\quad \frac{4}{3}\pi < \frac{7}{6}\pi+\alpha < \frac{5}{3}\pi$$

であり，$\cos\left(t+\frac{\pi}{6}+\alpha\right)=-1$ となる t が存在する $\left(t=\frac{5}{6}\pi-\alpha\right)$．

よって，$S(t)$ の最大値は

$$-\sqrt{6}\left\{(-1)-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right\} = \boldsymbol{\sqrt{6}+\frac{\sqrt{2}}{2}\pi} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．