関数 $F,\ G$ を

$$F(a)=\int_{-\pi}^{\pi}\{ae^{-x}\sin x-(2a+1)e^{-x}\cos x\}\,dx$$
$$G(a)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{ae^{-x}\sin x+2(a+1)e^{-x}\cos x\}^2\,dx$$

で定める．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 定積分 $F(a)$ を求めよ．
(2) 定積分 $G(a)$ を求めよ．
(3) $a$ が実数全体を動くとき，$\dfrac{F(a)}{G(a)}$ に最大値，最小値があれば，それを求めよ．

(23 愛知県立大 情報科学 3)

---

【答】

(1) $F(a)=\dfrac{a+1}{2}(e^{\pi}-e^{-\pi})$

(2) $G(a)=\dfrac{3a^2+4a+4}{8}(e^{\pi}-e^{-\pi})$

(3) 最小値 $-\dfrac{1}{2}$，最大値 1

---

【解答】

$$F(a)=\int_{-\pi}^{\pi}\{ae^{-x}\sin x-(2a+1)e^{-x}\cos x\}\,dx$$
$$G(a)=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\{ae^{-x}\sin x+2(a+1)e^{-x}\cos x\}^2\,dx$$

(1) $e^{-x}\sin x,\ e^{-x}\cos x$ について

$$(e^{-x}\sin x)'=-e^{-x}\sin x+e^{-x}\cos x$$
$$(e^{-x}\cos x)'=-e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x$$

が成り立つから

$$\left\{-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)\right\}'=e^{-x}\sin x$$
$$\left\{\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)\right\}'=e^{-x}\cos x$$

であり

$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{-x}\sin x\,dx=\left[-\frac{e^{-x}}{2}(\sin x+\cos x)\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{2}\qquad\cdots\cdots ①$$
$$\int_{-\pi}^{\pi}e^{-x}\cos x\,dx=\left[\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)\right]_{-\pi}^{\pi}=\frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{2}\qquad\cdots\cdots ②$$

である．よって

$$\begin{aligned}F(a)&=a\frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{2}-(2a+1)\frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{2}\\&=\boldsymbol{\frac{a+1}{2}(e^{\pi}-e^{-\pi})}\qquad\cdots\cdots(答)\end{aligned}$$

である．

(2) $2(a+1)=b$ とおくと

$$\begin{aligned}
&(ae^{-x}\sin x+be^{-x}\cos x)^2\\
&=e^{-2x}(a^2\sin^2 x+2ab\sin x\cos x+b^2\cos^2 x)\\
&=e^{-2x}\left(a^2\frac{1-\cos 2x}{2}+ab\sin 2x+b^2\frac{1+\cos 2x}{2}\right)\\
&=e^{-2x}\left(ab\sin 2x+\frac{b^2-a^2}{2}\cos 2x+\frac{b^2+a^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

であるから

$$G(a)=ab\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-2x}\sin 2x\,dx+\frac{b^2-a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-2x}\cos 2x\,dx+\frac{b^2+a^2}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-2x}\,dx$$

ここで，$2x=t$ とおくと

$$2\,dx=dt \qquad \begin{array}{c|ccc} x & -\dfrac{\pi}{2} & \longrightarrow & \dfrac{\pi}{2} \\ \hline t & -\pi & \longrightarrow & \pi \end{array}$$

であり

$$\begin{aligned}
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-2x}\sin 2x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-t}\sin t\cdot\frac{1}{2}\,dt=\frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{4}\quad(\because\ ①)\\
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-2x}\cos 2x\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-t}\cos t\cdot\frac{1}{2}\,dt=\frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{4}\quad(\because\ ②)\\
&\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}e^{-2x}\,dx=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-t}\cdot\frac{1}{2}\,dt=\left[-\frac{e^{-t}}{2}\right]_{-\pi}^{\pi}=-\frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{2}
\end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned}
G(a)&=ab\frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{4}+\frac{b^2-a^2}{2}\,\frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{4}-\frac{b^2+a^2}{2}\,\frac{e^{-\pi}-e^{\pi}}{2}\\
&=\frac{-2ab+(a^2-b^2)+2(a^2+b^2)}{8}(e^{\pi}-e^{-\pi})\\
&=\frac{3a^2-2ab+b^2}{8}(e^{\pi}-e^{-\pi})
\end{aligned}$$

$b=2(a+1)$ であるから

$$\begin{aligned}
3a^2-2ab+b^2&=3a^2-2a\cdot 2(a+1)+4(a+1)^2\\
&=3a^2-(4a^2+4a)+4(a^2+2a+1)\\
&=3a^2+4a+4
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{G(a)=\frac{3a^2+4a+4}{8}(e^{\pi}-e^{-\pi})}\qquad\cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $H(a)=\dfrac{F(a)}{G(a)}$ とおくと，(1)(2) より

$$H(a)=\frac{4(a+1)}{3a^2+4a+4}$$

であり，$3a^2+4a+4=3\left(a+\dfrac{2}{3}\right)^2+\dfrac{8}{3}>0$ であるから，$H(a)$ は実数全体で定義される関数である．

$$
\begin{aligned}
H'(a) &= \frac{4\cdot(3a^2+4a+4)-4(a+1)(6a+4)}{(3a^2+4a+4)^2} \\
&= \frac{4\cdot(3a^2+4a+4)-4(6a^2+10a+4)}{(3a^2+4a+4)^2} \\
&= \frac{4(-3a^2-6a)}{(3a^2+4a+4)^2} \\
&= -\frac{12a(a+2)}{(3a^2+4a+4)^2}
\end{aligned}
$$

$H(a)$ の増減は下表となる．

| $a$ | $\cdots$ | $-2$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $H'(a)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ |
| $H(a)$ | $\searrow$ | $-\frac{1}{2}$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ |

また，$H(a) = \dfrac{4\left(1+\dfrac{1}{a}\right)}{3a+4+\dfrac{4}{a}}$ より

$$\lim_{a\to\pm\infty} H(a) = 0$$

であるから，$\dfrac{F(a)}{G(a)} = H(a)$ は

$a=-2$ のとき，　**最小値** $\boldsymbol{-\frac{1}{2}}$ ……（答）

$a=0$ のとき，　**最大値 1** ……（答）

をとる．