n を 2 以上の自然数とする．$x>0$ において関数 $f_n(x)$ を，

$$f_n(x)=x^{n-1}e^{-x}$$

と定義する．また，関数 $f_n(x)$ の最大値を m_n とする．

(1) m_n を n を用いて表せ．
(2) $x>0$ であるとき，$xf_n(x)\leqq m_{n+1}$ が成り立つことを利用して，極限値 $\lim_{x\to\infty} f_n(x)$ を求めよ．

a を正の実数とするとき，x に関する方程式

$$x=ae^x \qquad \cdots\cdots ①$$

を考える．

(3) 方程式 ① における正の実数解の個数を調べよ．

以下，方程式 ① が，相異なる 2 つの正の実数解 $\alpha,\ \beta$ を持ち，$\beta-\alpha=\log 2$ をみたす場合を考える．

(4) $\alpha,\ \beta,\ a$ を求めよ．
(5) xy 平面上において $y=f_2(x)$ と $y=a$ で囲まれた領域の面積を求めよ．

(23 札幌医大 4)

【答】

(1) $m_n=\left(\dfrac{n-1}{e}\right)^{n-1}$
(2) $\lim_{x\to\infty} f_n(x)=0$
(3) $0<a<\dfrac{1}{e}$ のとき 2 個，$a=\dfrac{1}{e}$ のとき 1 個，$a>\dfrac{1}{e}$ のとき 0 個
(4) $\alpha=\log 2,\ \beta=2\log 2,\ a=\dfrac{\log 2}{2}$
(5) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}(\log 2)^2$

【解答】

$$f_n(x)=x^{n-1}e^{-x} \quad (x>0)$$

(1) 微分すると

$$\begin{aligned} {f_n}'(x)&=(n-1)x^{n-2}\cdot e^{-x}+x^{n-1}\cdot e^{-x}(-1)\\ &=(n-1-x)x^{n-2}e^{-x}\end{aligned}$$

$x>0$ における増減は下表となる．

x	(0)	$\cdots$	$n-1$	$\cdots$
${f_n}'(x)$		$+$	0	$-$
$f_n(x)$	(0)	$\nearrow$		$\searrow$

よって，$x>0$ における最大値 m_n は

$$m_n=f_n(n-1)=(n-1)^{n-1}e^{-(n-1)}=\boldsymbol{\left(\dfrac{n-1}{e}\right)^{n-1}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) $x > 0$ のとき

$$xf_n(x) = x^n e^{-x} = f_{n+1}(x) \leqq m_{n+1} \quad \text{(ヒントの式を確認した)}$$

が成り立つ．$f_n(x) > 0$ でもあるから

$$0 < f_n(x) < \frac{m_{n+1}}{x}$$

m_{n+1} は定数であり

$$\lim_{x \to \infty} \frac{m_{n+1}}{x} = 0$$

である．はさみうちの原理より

$$\boldsymbol{\lim_{x \to \infty} f_n(x) = 0} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $$x = ae^x \qquad \cdots\cdots ①$$

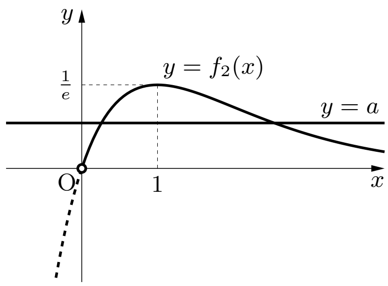
を変形すると

$$xe^{-x} = a \qquad \therefore \quad f_2(x) = a$$

(1)，(2) より

$$m_2 = f_2(1) = \frac{1}{e}, \quad \lim_{x \to \infty} f_2(x) = 0$$

であり，$y = f_2(x)$ のグラフは右図となる．



方程式 ① における正の実数解の個数は $y = f_2(x)$ と $y = a$ $(a > 0)$ の交点の個数と一致するから，求める個数は

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{0 < a < \frac{1}{e}} \textbf{のとき，} && \textbf{2 個} \\ &\boldsymbol{a = \frac{1}{e}} \textbf{のとき，} && \textbf{1 個} \\ &\boldsymbol{a > \frac{1}{e}} \textbf{のとき，} && \textbf{0 個} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) α, β は方程式 ① の相異なる 2 つの正の実数解であり，$\beta - \alpha = \log 2$ をみたすから

$$\begin{cases} \alpha = ae^{\alpha} \\ \beta = ae^{\beta} \\ \beta - \alpha = \log 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = \alpha + \log 2 & \cdots\cdots ② \\ \alpha = ae^{\alpha} & \cdots\cdots ③ \\ \alpha + \log 2 = ae^{\alpha + \log 2} & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

を満たす．④ の右辺を変形すると

$$ae^{\alpha + \log 2} = ae^{\alpha} e^{\log 2} = \alpha \cdot 2 \quad (\because ③)$$

であるから，④ は

$$\alpha + \log 2 = 2\alpha \qquad \therefore \quad \boldsymbol{\alpha = \log 2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

② に代入すると

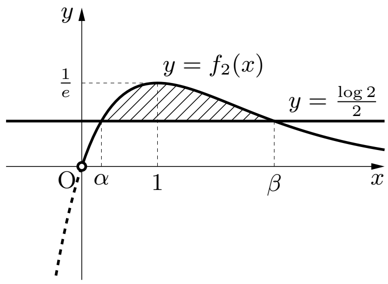
$$\boldsymbol{\beta = 2 \log 2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

また

$$\boldsymbol{a} = \frac{\alpha}{e^{\alpha}} = \frac{\log 2}{e^{\log 2}} = \boldsymbol{\frac{\log 2}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(5) $y = f_2(x)$ と $y = a$ で囲まれた領域は右図の斜線部分であり，面積 S は



$$
\begin{aligned}
S &= \int_\alpha^\beta \{f_2(x) - a\}\,dx \\
&= \int_\alpha^\beta \{xe^{-x} - a\}\,dx \\
&= \Big[-(x+1)e^{-x} - ax \Big]_\alpha^\beta \\
&= -(\beta+1)e^{-\beta} + (\alpha+1)e^{-\alpha} - a(\beta - \alpha) \\
&= -(2\log 2 + 1)e^{-2\log 2} + (\log 2 + 1)e^{-\log 2} - \frac{\log 2}{2}(2\log 2 - \log 2) \quad (\because\ (2)) \\
&= -\frac{1}{4}(2\log 2 + 1) + \frac{1}{2}(\log 2 + 1) - \frac{1}{2}(\log 2)^2 \\
&= \boldsymbol{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}(\log 2)^2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である.