関数 $f(x)=-\cos x+\dfrac{\cos x}{2\sqrt{2}\sin x}$ $(0<x<\pi)$ について．次の問いに答えよ．

(1) 極限 $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)$ と $\displaystyle\lim_{x\to\pi-0}f(x)$ を求めよ．

(2) $f(x)$ の増減を調べ，極値を求めよ．

(3) 定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}|f(x)|\,dx$ の値を求めよ．

(23 東京海洋大 海洋工 4-II)

【答】

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\pi-0}f(x)=-\infty$

(2) 極小値 $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$，極大値 $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

(3) $2-\sqrt{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\log 2$

【解答】

$$f(x)=-\cos x+\frac{\cos x}{2\sqrt{2}\sin x}\quad(0<x<\pi)$$

(1) $\displaystyle\lim_{x\to+0}\cos x=1$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}\sin x=+0$ (正の値をとりながら 0 に近づく) であるから

$$\lim_{x\to+0}f(x)=-1+\infty=\boldsymbol{\infty}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

$\displaystyle\lim_{x\to\pi-0}\cos x=-1$，$\displaystyle\lim_{x\to\pi-0}\sin x=+0$ であるから

$$\lim_{x\to\pi-0}f(x)=-(-1)-\infty=\boldsymbol{-\infty}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 微分すると

$$\begin{aligned}f'(x)&=\sin x+\frac{(-\sin x)\cdot\sin x-\cos x\cdot\cos x}{2\sqrt{2}\sin^2 x}\\&=\sin x-\frac{1}{2\sqrt{2}\sin^2 x}\\&=\frac{(\sqrt{2}\sin x)^3-1}{2\sqrt{2}\sin^2 x}\\&=\frac{(\sqrt{2}\sin x-1)(2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x+1)}{2\sqrt{2}\sin^2 x}\end{aligned}$$

ここで

$$2\sin^2 x+\sqrt{2}\sin x+1=2\left(\sin x+\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2+\frac{3}{4}>0$$

であるから，$0<x<\pi$ における $f(x)$ の増減は下表となる．

x	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	(π)
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		↘		↗		↘	

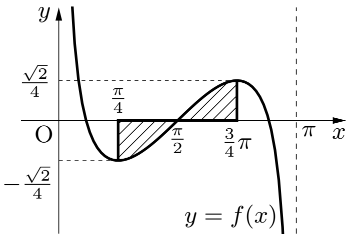
よって，$f(x)$ は

$x=\dfrac{\pi}{4}$ のとき　**極小値** $\boldsymbol{-\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$，　……(答)

$x=\dfrac{3}{4}\pi$ のとき　**極大値** $\boldsymbol{\dfrac{\sqrt{2}}{4}}$　……(答)

をとる．

(3) $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ であることにも注意すると，$y=f(x)$ のグラフは右図となる．ここで



$$f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}$$
$$=-\sin t-\frac{\sin t}{2\sqrt{2}\cos t}$$
$$f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)+\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}{2\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}+t\right)}$$
$$=\sin t+\frac{\sin t}{2\sqrt{2}\cos t}$$
$$\therefore\quad f\left(\frac{\pi}{2}-t\right)=-f\left(\frac{\pi}{2}+t\right)$$

が成り立つから，$y=f(x)$ のグラフは点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$ に関して対称である．

定積分 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}|f(x)|\,dx$ は斜線部分の面積に等しいから

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}|f(x)|\,dx=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}f(x)\,dx$$
$$=2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}\left(-\cos x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{(\sin x)'}{\sin x}\right)dx$$
$$=2\left[-\sin x+\frac{1}{2\sqrt{2}}\log|\sin x|\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi}$$
$$=2\left\{\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-(-1)\right\}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4\sqrt{2}}\log 2\right)$$
$$=\boldsymbol{2-\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{4}\log 2}\qquad\text{……(答)}$$

である．