t は正の実数とする．以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x)=2tx^2e^{-tx^2}$ の極値を求めよ．

(2) 定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{t}} 4tx(1-tx^2)e^{-tx^2}\log x\,dx$ の値を t を用いて表せ．

(3) (2) で求めた値を $g(t)$ とおく．$1<t<4$ のとき，不等式

$$g(t)>(t^{\frac{5}{2}}-t^2+1)e^{-t^2}-e^{-t}$$

が成り立つことを示せ．

(23 熊本大 理・工・医 (技術)・薬 4)

【答】

(1) 極大値 $\dfrac{2}{e}$，極小値 0

(2) $(t^2\log t+1)e^{-t^2}-e^{-t}$

(3) 略

【解答】

(1) $$f(x)=2tx^2e^{-tx^2}$$

x で微分して

$$\begin{aligned} f'(x)&=4tx\cdot e^{-tx^2}+2tx^2\cdot e^{-tx^2}(-2tx)\\ &=4tx(1-tx^2)e^{-tx^2} \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

t は正の実数であるから，$f(x)$ の増減は下表となる．

x	$\cdots$	$-\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{t}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

以上により，$f(x)$ は

$x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{t}}$ において　**極大値 $\boldsymbol{\dfrac{2}{e}}$**，　……(答)

$x=0$ において　**極小値 0**　……(答)

をとる．

- $f(x)$ は偶関数であり，グラフは y 軸に関して対称であるから，$x\geqq 0$ の範囲で増減を調べてもよい．

(2) 部分積分法を用いる．

$$\int_1^{\sqrt{t}} 4tx(1-tx^2)e^{-tx^2}\log x\,dx=\int_1^{\sqrt{t}} f'(x)\log x\,dx \quad (\because ①)$$

$$=\Big[f(x)\log x\Big]_1^{\sqrt{t}}-\int_1^{\sqrt{t}} f(x)\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$=f(\sqrt{t})\log\sqrt{t}-\int_1^{\sqrt{t}} 2txe^{-tx^2}\,dx$$

$$=2t^2e^{-t^2}\log\sqrt{t}+\Big[e^{-tx^2}\Big]_1^{\sqrt{t}}$$

$$=t^2e^{-t^2}\log t+e^{-t^2}-e^{-t}$$

$$=\boldsymbol{(t^2\log t+1)e^{-t^2}-e^{-t}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる．

(3) (2) の結果より

$$\begin{aligned}
&g(t)-\{(t^{\frac{5}{2}}-t^2+1)e^{-t^2}-e^{-t}\}\\
&=\{(t^2\log t+1)e^{-t^2}-e^{-t}\}-\{(t^{\frac{5}{2}}-t^2+1)e^{-t^2}-e^{-t}\}\\
&=t^2(\log t-\sqrt{t}+1)e^{-t^2}
\end{aligned}$$

である．$h(t)=\log t-\sqrt{t}+1$ $(1<t<4)$ とおくと

$$h'(t)=\frac{1}{t}-\frac{1}{2\sqrt{t}}=\frac{2-\sqrt{t}}{2t}>0$$

であり，$h(t)$ は増加関数である．$h(1)=0$ なので，$1<t<4$ においては $h(t)>0$ である．

さらに，$t^2e^{-t^2}>0$ であるから

$$g(t)-\{(t\frac{5}{2}-t^2+1)e^{-t^2}-e^{-t}\}>0$$

が成り立つ． …… (証明終わり)