関数 $f(x)=e^{-x}\sin 2x$ について以下の問に答えよ．

(1) $f(x)$ の導関数を求めよ．

(2) $f(x)$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ が $x=a$ で最大となるとき，$\tan a$ を求めよ．

(3) $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ とすると $I=2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos 2x\,dx$ となることを示せ．

(4) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ を求めよ．

(23 群馬大 理工 (電子・機械)5・(物質・環境)6)

【答】

(1) $f'(x)=e^{-x}(2\cos 2x-\sin 2x)$

(2) $\tan a=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$

(3) 略

(4) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\frac{2}{5}(e^{-\frac{\pi}{2}}+1)$

【解答】

$$f(x)=e^{-x}\sin 2x$$

(1) 積の微分法を用いると

$$\begin{aligned} f'(x)&=-e^{-x}\cdot\sin 2x+e^{-x}\cdot(\cos 2x\cdot 2)\\ &=\boldsymbol{e^{-x}(2\cos 2x-\sin 2x)} \end{aligned} \qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) (1) の式を合成すると

$$\begin{aligned} f'(x)&=e^{-x}\sqrt{5}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2x-\frac{1}{\sqrt{5}}\sin 2x\right)\\ &=e^{-x}\sqrt{5}\cos(2x+\alpha) \end{aligned}$$

と表すことができる．ここで α は，$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ をみたす $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲の定角とする．

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $\alpha\leqq 2x+\alpha\leqq\pi+\alpha$ であり，$f'(x)$ の符号は $2x+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，すなわち $x=\dfrac{\pi-2\alpha}{4}$ で正から負に変わる．したがって，$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi-2\alpha}{4}$ で極大かつ最大となるから，$a=\dfrac{\pi-2\alpha}{4}$ であり

$$\tan a=\tan\frac{\pi-2\alpha}{4}=\frac{\tan\dfrac{\pi}{4}-\tan 2\alpha}{1+\tan\dfrac{\pi}{4}\tan 2\alpha}=\frac{1-\tan\dfrac{\alpha}{2}}{1+\tan\dfrac{\alpha}{2}}$$

ここで

$$\tan^2\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{\cos^2\dfrac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\dfrac{2}{\sqrt{5}}}{1+\dfrac{2}{\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+2}=(\sqrt{5}-2)^2$$

$\tan\dfrac{\alpha}{2}>0$ より

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\sqrt{5}-2$$

であり

$$\tan a = \frac{1-(\sqrt{5}-2)}{1+(\sqrt{5}-2)} = \frac{3-\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1} = \frac{(3-\sqrt{5})(\sqrt{5}+1)}{5-1}$$
$$= \frac{-2+2\sqrt{5}}{4} = \boldsymbol{\frac{\sqrt{5}-1}{2}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 部分積分法を用いると

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\sin 2x\,dx \\ &= \Big[-e^{-x}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos 2x\cdot 2\,dx \\ &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}\cos 2x\,dx \end{aligned}$$

である． ……(証明終わり)

(4) (3) の結果をさらに部分積分すると

$$\begin{aligned} I &= 2\Big[-e^{-x}\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x}(-\sin 2x)\cdot 2\,dx \\ &= 2(e^{-\frac{\pi}{2}}+1) - 4I \\ \therefore\quad & (1+4)I = 2(e^{-\frac{\pi}{2}}+1) \end{aligned}$$

である．よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = I = \boldsymbol{\frac{2}{5}(e^{-\frac{\pi}{2}}+1)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．