関数

$$f(x) = \sin x \sin 2x - |\cos x| \cos^2 x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

について，以下の問いに答えよ．

(1) $\sin x \sin 2x$ を $\cos x$ の式で表せ．

(2) 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ において，$f(x) = 0$ をみたす x の個数 N を求めよ．

(3) 区間 $0 \leqq x \leqq \pi$ における関数 $f(x)$ の最大値 M と最小値 m を求めよ．

(4) 不定積分 $I = \displaystyle\int \cos^3 x \, dx$ を求めよ．ただし，積分定数は省略してもよい．

(5) 定積分 $J = \displaystyle\int_0^{\pi} |f(x)| \, dx$ を求めよ．

(23 電気通信大 1)

【答】

(1) $2\cos x - 2\cos^3 x$
(2) $N = 2$
(3) $M = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$，$m = -\dfrac{4\sqrt{6}}{9}$
(4) $I = \sin x - \dfrac{1}{3}\sin^3 x$
(5) $J = \dfrac{4\sqrt{3}}{9} + \dfrac{4}{3}$

【解答】

$$f(x) = \sin x \sin 2x - |\cos x| \cos^2 x \quad (0 \leqq x \leqq \pi)$$

(1) 2 倍角の公式を用いると

$$\begin{aligned} \sin x \sin 2x &= \sin x \cdot 2\sin x \cos x \\ &= 2(1 - \cos^2 x)\cos x \\ &= \boldsymbol{2\cos x - 2\cos^3 x} \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる．

(2) 場合分けして $|\cos x|$ の絶対値をはずす．

(i) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= (2\cos x - 2\cos^3 x) - (\cos x)\cos^2 x \\ &= \cos x(2 - 3\cos^2 x) \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ においては $0 \leqq \cos x \leqq 1$ であるから，$f(x) = 0$ をみたすのは

$$\cos x = 0,\ \sqrt{\frac{2}{3}}$$

のときであり，これをみたす x の個数は

2 (個)

である．

(ii) $\dfrac{\pi}{2} < x \leqq \pi$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= (2\cos x - 2\cos^3 x) - (-\cos x)\cos^2 x \\ &= \cos x(2 - \cos^2 x) \end{aligned}$$

$\dfrac{\pi}{2} < x \leqq \pi$ においては $-1 \leqq \cos x < 0$ であるから，$f(x) < 0$ であり，$f(x) = 0$ を満たす x は存在しない．

以上 (i)(ii) より，$0 \leqq x \leqq \pi$ において，$f(x) = 0$ をみたす x の個数 N は

$$\boldsymbol{N = 2} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(3) $t = \cos x$ とおくと

$$f(x) = 2t - 2t^3 - |t|t^2$$

であり，$0 \leqq x \leqq \pi$ における関数 $f(x)$ の最大値 M と最小値 m は，$-1 \leqq t \leqq 1$ における関数 $g(t) = 2t - 2t^3 - |t|t^2$ の最大値と最小値と一致する．場合分けして絶対値をはずす．

(i) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$0 \leqq t \leqq 1$ であり

$$g(x) = 2t - 3t^3$$

$$g'(t) = 2 - 9t^2$$

$g(t)$ の増減は右表となる．

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{3}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{4\sqrt{2}}{9}$	$\searrow$	-1

(ii) $\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき，$-1 \leqq t \leqq 0$ であり

$$g(t) = 2t - t^3$$

$$g'(t) = 2 - 3t^2$$

$g(t)$ の増減は右表となる

t	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	0
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	-1	$\searrow$	$-\frac{4\sqrt{6}}{9}$	$\nearrow$	0

以上 (i)，(ii) より

$$\boldsymbol{M = \frac{4\sqrt{2}}{9}, \quad m = -\frac{4\sqrt{6}}{9}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(4) 置換積分法を用いると

$$\begin{aligned} I &= \int \cos^2 x \cos x \, dx \\ &= \int (1 - \sin^2 x)(\sin x)' \, dx \\ &= \boldsymbol{\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x} \quad (\because \text{ 積分定数は省略}) \end{aligned} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(5) (2)(i) より，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において曲線 $y = f(x)$ と x 軸は 2 点で交わる．交点の x 座標は

$$\cos x = 0, \ \sqrt{\frac{2}{3}}$$

の解であり，$\cos x = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$ $\left(0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ となる x を α とおくと

$$x = \frac{\pi}{2}, \ \alpha$$

である．

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$f(x) = \cos x(2 - 3\cos^2 x)$ であり

$0 \leqq x \leqq \alpha$ のとき　　$f(x) \leqq 0$，

$\alpha \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき　　$f(x) \geqq 0$

である．また

$\dfrac{\pi}{2} < x \leqq \pi$ のとき　　$f(x) = \cos x(2 - \cos^2 x) < 0$

であるから

$$
\begin{aligned}
J &= \int_0^{\pi} |f(x)|\,dx \\
&= \int_0^{\alpha} \{-f(x)\}\,dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \{-f(x)\}\,dx \\
&= \int_0^{\alpha} \{-\cos x(2-3\cos^2 x)\}\,dx + \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \cos x(2-3\cos^2 x)\,dx \\
&\qquad + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \{-\cos x(2-\cos^2 x)\}\,dx \\
&= -\left[2\sin x - 3\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right)\right]_0^{\alpha} + \left[2\sin x - 3\left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right)\right]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} \\
&\qquad - \left[2\sin x - \left(\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x\right)\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \quad (\because\ (4)) \\
&= -\Big[-\sin x + \sin^3 x\Big]_0^{\alpha} + \Big[-\sin x + \sin^3 x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} - \left[\sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= 2(\sin\alpha - \sin^3\alpha) + (-1+1) + \left(1 + \frac{1}{3}\right) \\
&= 2(\sin\alpha - \sin^3\alpha) + \frac{4}{3}
\end{aligned}
$$

$\cos\alpha = \sqrt{\dfrac{2}{3}}\ \left(0 \leqq \alpha \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ であるから

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

なので

$$
\begin{aligned}
J &= 2\left(\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3\sqrt{3}}\right) + \frac{4}{3} \\
&= \boldsymbol{\frac{4\sqrt{3}}{9} + \frac{4}{3}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である．