ω および γ を正の定数とする．座標平面上を運動する点 P の時刻 t における座標 $(x,\ y)$ が

$$x = \omega t - \gamma \sin \omega t, \quad y = 1 - \gamma \cos \omega t$$

で表されるとき，次の問いに答えよ．

(1) 点 P が描く曲線について，時刻 $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$ に対応する点における接線の方程式を求めよ．

(2) 点 P の時刻 t における速度を $\overrightarrow{v}$，加速度を $\overrightarrow{\alpha}$ とするとき，速さ $|\overrightarrow{v}|$ と加速度の大きさ $|\overrightarrow{\alpha}|$ を求めよ．

(3) 点 P の速さの最大値とそのときの時刻 t を求めよ．

(4) $\gamma = 1$ とする．このとき，時刻 $t = 0$ から $t = \dfrac{2\pi}{\omega}$ までに点 P が通過する道のり L を求めよ．

(23 山梨大 工 4)

【答】

(1) $y = \gamma x - \dfrac{\gamma\pi}{2} + \gamma^2 + 1$

(2) $|\overrightarrow{v}| = \omega\sqrt{1 + \gamma^2 - 2\gamma\cos\omega t}$，$|\overrightarrow{\alpha}| = \gamma\omega^2$

(3) $t = \dfrac{(2k+1)\pi}{\omega}$ (k : 整数) のとき，$(1+\gamma)\omega$

(4) $L = 8$

【解答】

$$x = \omega t - \gamma \sin \omega t,\ y = 1 - \gamma \cos \omega t \qquad \cdots\cdots ①$$

(1) ① を微分すると

$$\frac{dx}{dt} = \omega - \gamma\omega\cos\omega t,$$
$$\frac{dy}{dt} = \gamma\omega\sin\omega t$$

であるから，時刻 $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$ のときは

$$x = \frac{\pi}{2} - \gamma, \quad y = 1, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\gamma\omega}{\omega - 0} = \gamma$$

であるから，時刻 $t = \dfrac{\pi}{2\omega}$ に対応する点における接線の方程式は

$$y - 1 = \gamma\left\{x - \left(\frac{\pi}{2} - \gamma\right)\right\}$$
$$\therefore \quad \boldsymbol{y = \gamma x - \frac{\gamma\pi}{2} + \gamma^2 + 1} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) 速度 $\overrightarrow{v} = \left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ の大きさ (速さ) は

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{v}| &= \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \\ &= \sqrt{(\omega - \gamma\omega\cos\omega t)^2 + (\gamma\omega\sin\omega t)^2} \\ &= \boldsymbol{\omega\sqrt{1 + \gamma^2 - 2\gamma\cos\omega t}} \qquad \cdots\cdots(答) \end{aligned}$$

である．また

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \gamma\omega^2 \sin\omega t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \gamma\omega^2 \cos\omega t$$

なので，加速度 $\overrightarrow{\alpha} = \left(\frac{d^2x}{dt^2},\ \frac{d^2y}{dt^2}\right)$ の大きさは

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{\alpha}| &= \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2} \\
&= \sqrt{(\gamma\omega^2 \sin\omega t)^2 + (\gamma\omega^2 \cos\omega t)^2} \\
&= \boldsymbol{\gamma\omega^2} \quad (\because\ \gamma,\ \omega \text{ は正の定数}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．

(3) 速さ $|\overrightarrow{v}|$ が最大になるのは，$\cos\omega t = -1$ のときであり，その最大値は

$$\omega\sqrt{1+\gamma^2+2\gamma} = \boldsymbol{(1+\gamma)\omega} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．そのときの時刻 t は

$$\omega t = \pi + 2k\pi\ (k : \text{整数}) \qquad \therefore \quad \boldsymbol{t = \frac{(2k+1)\pi}{\omega}}\ \textbf{(}\boldsymbol{k}\textbf{ : 整数)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) $\gamma = 1$ のとき

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{v}| &= \omega\sqrt{1+1^2-2\cos\omega t} = \omega\sqrt{2(1-\cos\omega t)} \\
&= \omega\sqrt{2\cdot 2\sin^2\frac{\omega t}{2}} = 2\omega\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|
\end{aligned}$$

$0 \leqq t \leqq \dfrac{2\pi}{\omega}$ においては $0 \leqq \dfrac{\omega t}{2} \leqq \pi$ であり，$\sin\dfrac{\omega t}{2} \geqq 0$ なので，求める道のり L は

$$\begin{aligned}
L &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} |\overrightarrow{v}|\,dt = 2\omega\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \sin\frac{\omega t}{2}\,dt \\
&= 2\omega\left[-\frac{2}{\omega}\cos\frac{\omega t}{2}\right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \\
&= -4(\cos\pi - \cos 0) \\
&= \mathbf{8} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．