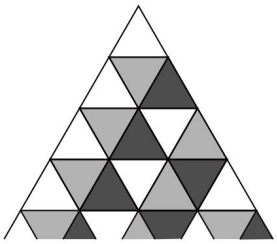
右図のように，同じ大きさの正三角形を並べて大きい正三角形を構築し，上から順番に 1 段目，2 段目，3 段目．$\cdots$ と呼ぶことにして，100 段目まで並べる．さらに，右図のように，各段の小三角形を左から白色，灰色，黒色の順に繰り返し塗るとにする．

このとき，100 段目までの小三角形の総数と 100 段目までの白色の小三角形の個数を求めよ．



(23 琉球大 教育・農・国 1(2))

【答】 小三角形の総数は 10000，白色の小三角形の個数は

【解答】

小三角形は

1 段目に 1 個, 2 段目に 3 個, 3 段目に 5 個, 4 段目に 7 個，$\cdots$

あり，1 段下がると 2 個増える．よって，k 段目の小三角形の個数は

$$1+2(k-1)=2k-1 \text{ 個}$$

であり，100 段までの小三角形の総数は

$$\sum_{k=1}^{100}(2k-1)=\frac{100(1+199)}{2}=100^2=\mathbf{10000} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

白色の小三角形の個数を 3 段ごとに分けて考える．

$(3k-2)$ 段目には，$2(3k-2)-1=6k-5$ 個の三角形がある．この中で白色の小三角形が現れる場所は，左端から順に

$$3\cdot 0+1,\ 3\cdot 1+1,\ 3\cdot 2+1,\ \cdots,\ 3\cdot(2k-2)+1$$

である．すなわち，この段には

$$2k-1 \text{ 個}$$

の白色の小三角形がある．

同様に，$(3k-1)$ 段目には，$6k-3$ 個の三角形があり，白色の小三角形が現れる場所は上と同じく

$$3\cdot 0+1,\ 3\cdot 1+1,\ 3\cdot 2+1,\ \cdots,\ 3\cdot(2k-2)+1$$

であり，この段も

$$2k-1 \text{ 個}$$

の白色の小三角形がある．

$3k$ 段目には，$6k-1$ 個の三角形があり

$$3\cdot 0+1,\ 3\cdot 1+1,\ 3\cdot 2+1,\ \cdots,\ 3\cdot(2k-2)+1,\ 3\cdot(2k-1)+1$$

の場所に白色の小三角形が現れるから，この段には

$$2k \text{ 個}$$

の白色の小三角形がある．

よって，$(3k-2)$ 段，$(3k-1)$ 段，$3k$ 段の連続する 3 段には

$$(2k-1)+(2k-1)+(2k)=6k-2 \text{ 個}$$

の白色の小三角形がある．

$$100 = 3 \cdot 33 + 1$$

$100 = (3 \cdot 34 - 2)$ 段目には，白色の小三角形が $2 \cdot 34 - 1 = 67$ 個あるから，求める白色の小三角形の個数は

$$\sum_{k=1}^{33} (6k - 2) + 67 = \frac{33(4 + 196)}{2} + 67 = \mathbf{3367} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．