

方程式 $3x + y + z + w = 12$ を満たす x, y, z, w の 0 以上の整数解の組の総数を求めなさい。

(23 公立千歳科技大 中期 理工 1(8))

【答】 185

【解答】

$$3x + y + z + w = 12 \quad (x, y, z, w \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}) \quad \dots\dots (*)$$

(*) を満たす x は $x = 0, 1, 2, 3, 4$ の 5 通りがあり, x を固定したとき, (*) は

$$y + z + w = 12 - 3x$$

であり, $12 - 3x$ は定数となる. $n = 12 - 3x$ とおくと

$$y + z + w = n \quad (n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

となる 0 以上の整数解の組 (y, z, w) の総数は n 個の球と 2 本の仕切り棒の並び方の総数と一致するから, その総数は

$${}_{n+2}C_2$$

である. $x = 0, 1, 2, 3, 4$ のとき, $n = 12, 9, 6, 3, 0$ であるから, 求める総数は

$$\begin{aligned} & {}_{14}C_2 + {}_{11}C_2 + {}_8C_2 + {}_5C_2 + {}_2C_2 \\ &= \frac{14 \cdot 13}{2 \cdot 1} + \frac{11 \cdot 10}{2 \cdot 1} + \frac{8 \cdot 7}{2 \cdot 1} + \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} + \frac{2 \cdot 1}{2 \cdot 1} \\ &= 91 + 55 + 28 + 10 + 1 \\ &= 185 \end{aligned} \quad \dots\dots(\text{答})$$

である.

- ① を満たす 0 以上の整数解の組 (y, z, w) は 3 種類のものの中から重複を許して n 個をとる取り方の総数であるから

$${}_3H_n = {}_{3+n-1}C_n = {}_{n+2}C_n = {}_{n+2}C_2$$

である.

- ① を満たす 0 以上の整数 y, z, w において, y を $0 \leq y \leq n$ の範囲で固定すると

$$z + w = n - y$$

であり, これを満たす (z, w) は

$$(z, w) = (0, n - y), (1, n - y - 1), \dots, (n - y, 0)$$

の $n + 1 - y$ 個ある. よって, ① を満たす 0 以上の整数解の組 (y, z, w) の総数は

$$\sum_{y=0}^n (n + 1 - y) = \frac{(n + 1)\{(n + 1) + 1\}}{2} = \frac{(n + 2)(n + 1)}{2} (= {}_{n+2}C_2)$$

である.