以下の設問 (1) から (5) に答えなさい．なお，答えは数字のみではなく，階乗の記号！を含んだ式で答えてもよい．

(1) 1 から 9 までの 9 個の自然数を一列に並べるとき，並べ方は全部で何通りあるかを答えなさい．

(2) 1 から 9 までの 9 個の自然数を正九角形の頂点の位置に並べるとき，並べ方は全部で何通りあるかを答えなさい．ただし，回転させて同じになる並べ方は一通りとみなす．

(3) 1 から 9 までの 9 個の自然数を図 1 のように，正八角形の各頂点とその中央に並べるとき，並べ方は全部で何通りあるかを答えなさい．ただし，回転させて同じになる並べ方は一通りとみなす．

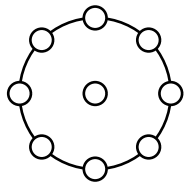

図 1

(4) 1 から 9 までの 9 個の自然数を図 2 のように，正方形の各頂点と各辺の中点および，正方形の中央の合計 9 か所に並べるとき，並べ方は全部で何通りあるかを答えなさい．ただし，回転させて同じになる並べ方は一通りとみなす．

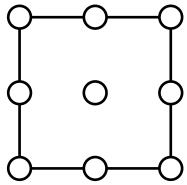

図 2

(5) 設問 (4) において，縦 3 列，横 3 行の数字 3 個ずつの和 6 個がすべて同じになるような並べ方は全部で何通りあるかを答えなさい．ただし，回転させて同じになる並べ方は一通りとみなす．

(23 和歌山大 後 シス工 1)

【答】

(1) 9! 通り
(2) 8! 通り
(3) $9 \cdot 7!$ 通り
(4) $\dfrac{9!}{4}$ 通り
(5) 18 通り

【解答】

(1) 異なる 9 個の数を一列に並べるときの並べ方は

9! 通り ……(答)

ある．

(2) 異なる 9 個の数を円形に並べるときの並べ方は

$(9-1)! = \mathbf{8!}$ **通り** ……(答)

ある．

(3) 中央に並べる数は 9 通りあり，残り 8 個の数を円形に並べる並べ方は，$(8-1)! = 7!$ 通りあるから，求める並べ方は全部で

$\mathbf{9 \cdot 7!}$ **通り** ……(答)

ある．

(4) 中央に並べる数は 9 通りあり，残りの 8 個の数を正方形の頂点と辺の中点に並べる並べ方は，8 個の中のある数に着目すると，その数が頂点にあるとき，辺の中点にあるときのどちらであっても 7! 通りの並べ方があるから，求める並べ方は全部で

$$9 \cdot (7! + 7!) = \mathbf{18 \cdot 7!}\ \textbf{通り} \qquad \cdots\cdots(答)$$

ある．

(5) 行または列となる 3 個の数の合計は

$$\frac{1+2+\cdots+9}{3} = \frac{9\cdot(9+1)}{2}\cdot\frac{1}{3} = 15$$

であり，和が 15 になる 3 個の数の組合せは

$\{1,\ 5,\ 9\}$，$\{1,\ 6,\ 8\}$，
$\{2,\ 4,\ 9\}$，$\{2,\ 5,\ 8\}$，$\{2,\ 6,\ 7\}$，
$\{3,\ 4,\ 8\}$，$\{3,\ 5,\ 7\}$，
$\{4,\ 5,\ 6\}$

の 8 通りである．このうち異なる数からなる組の組合せは

A : $\{1,\ 5,\ 9\}$，$\{2,\ 6,\ 7\}$，$\{3,\ 4,\ 8\}$
B : $\{1,\ 6,\ 8\}$，$\{2,\ 4,\ 9\}$，$\{3,\ 5,\ 7\}$

の 2 組がある．A，B の一方が行で使われ，他方が列で使われる．

$+90^\circ$ 回転 (-90° 回転でもよい) で行と列は入れかわる．回転させて同じになる並べ方は一通りとみなすから，A が行で B が列として並ぶものとしてよい．

行の一つ $\{1,\ 5,\ 9\}$ がどの行でどのように並ぶかを考えると

$$3 \cdot 3!\ \text{通り}$$

の並び方がある．いま，$\{1,\ 5,\ 9\}$ が 1 行目で 1, 5, 9 の順に並ぶとすると，1 列目は 2 通りに決まり，残り 4 個の数は 1 通りに決まる．すなわち

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \\ 8 & 3 & 4 \end{bmatrix} \text{または} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \\ 6 & 7 & 2 \end{bmatrix} \text{の}\quad 2\ \text{通り}$$

に決まる．したがって，回転による同一視を考えないときの配列は

$$3 \cdot 3! \times 2 = 36\ \text{通り}$$

ある．この中から 180° 回転して一致するのものを除く．

$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \\ 8 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ を 180° 回転させた $\begin{bmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ は 36 通りの中では別表現として数えている．回転させて同じになる並べ方は一通りとみなすので，この 2 つの配列は一通りとみなす．他の場合も同様であり，36 通りは一通りとみなすべき配列をすべて二通りに数えているから，求める並べ方は

$$\frac{36}{2} = \mathbf{18}\ \textbf{通り} \qquad \cdots\cdots(答)$$

ある．