$(3x^2-y)^7$ を展開したとき，

(1) x^8y^3 の係数は $\boxed{\text{アイウエオ}}$ である．

(2) 係数が 21 になる項の y の次数は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(3) $y=\dfrac{1}{3x^5}$ ならば，定数項は $\boxed{\text{キクケ}}$ である．

(23 金沢工大 2)

【答】

アイウエオ	カ	キクケ
-2835	6	567

【解答】

二項定理より $(3x^2-y)^7$ を展開したときの一般項は

$$ {}_7\mathrm{C}_k(3x^2)^{7-k}(-y)^k={}_7\mathrm{C}_k\cdot 3^{7-k}(-1)^kx^{14-2k}y^k \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 7) $$

である．

(1) x^8y^3 が現れるのは $k=3$ のときであるから，求める係数は

$$ {}_7\mathrm{C}_3\cdot 3^4\cdot(-1)^3=-\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 3^4=\mathbf{-2835} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) $$

である．

(2) 係数が 21 になるのは

$$ {}_7\mathrm{C}_k\cdot 3^{7-k}(-1)^k=21 $$

が成り立つときである．右辺は $3\cdot 7$ であるから

「$7-k=0$ または 1」かつ「k は偶数」

$\therefore\quad k=6$

であることが必要である．

このとき

$$ (\text{左辺})={}_7\mathrm{C}_6\cdot 3^1\cdot(-1)^6=7\cdot 3=21 $$

となり，十分である．

このとき，y の次数は **6** である． ……(答)

(3) $y=\dfrac{1}{3x^5}$ のとき，一般項は

$$ {}_7\mathrm{C}_k\cdot 3^{7-k}(-1)^kx^{14-2k}\left(\frac{1}{3x^5}\right)^k={}_7\mathrm{C}_k\cdot 3^{7-2k}(-1)^kx^{14-7k} $$

となる．これが定数となるのは

$$ 14-7k=0 \qquad \therefore\quad k=2 $$

のときであり，定数項は

$$ {}_7\mathrm{C}_2\cdot 3^3\cdot(-1)^2=\frac{7\cdot 6}{2\cdot 1}\cdot 3^3=\mathbf{567} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) $$

である．