大小 2 個のさいころを同時に投げるとき，出る目をそれぞれ $a,\ b$ とする．このとき，座標平面上の直線 $ax+by=1$ を ℓ とし，ℓ と x 軸の交点を A，ℓ と y 軸の交点を B とする．さらに原点を O とし，$\triangle$OAB の $\angle$OAB を θ とする．以下の問いに答えよ．

(1) $\cos\theta < \dfrac{1}{3}$ となる確率を求めよ．

(2) $2\sin\theta\cos\theta$ が整数となる確率を求めよ．

(3) $\triangle$OAB の内接円の半径が有理数となる確率を求めよ．

(23 公立はこだて未来大 シス情 1)

【答】

(1) $\dfrac{5}{36}$

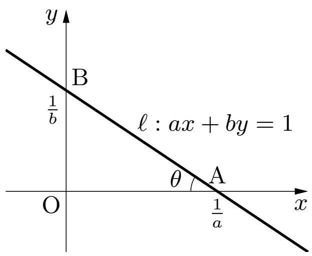
(2) $\dfrac{1}{6}$

(3) $\dfrac{1}{18}$

【解答】

$a,\ b$ は 1 以上 6 以下の整数であり，組 $(a,\ b)$ は 6^2 個りあり，これらは同様に確からしい．

(1)
$$\cos\theta < \frac{1}{3} \iff \frac{\text{OA}}{\text{AB}} < \frac{1}{3}$$
$$\iff \frac{3}{a} < \sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}$$
$$\iff 3b < \sqrt{a^2+b^2}$$
$$\iff 8b^2 < a^2$$
$$\iff 2\sqrt{2} < \frac{a}{b}$$



これを満たす組 $(a,\ b)$ は
$$(a,\ b)=(3,\ 1),\ (4,\ 1),\ (5,\ 1),\ (6,\ 1), (6,\ 2)$$
の 5 個である．求める確率は
$$\frac{5}{6^2} = \mathbf{\frac{5}{36}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$
である．

(2) $2\sin\theta\cos\theta$ を $a,\ b$ で表すと
$$2\sin\theta\cos\theta = 2\cdot\frac{\text{OB}}{\text{AB}}\cdot\frac{\text{OA}}{\text{AB}} = 2\cdot\frac{\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{a}}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}} = \frac{2}{\frac{b}{a}+\frac{a}{b}}$$
である．$2\sin\theta\cos\theta$ が整数となるのは，$\dfrac{b}{a}+\dfrac{a}{b} \fallingdotseq 1$ より
$$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=2 \iff b^2+a^2=2ab$$
$$\therefore\quad (a-b)^2=0 \qquad \therefore\quad a=b$$
のときであり，組 $(a,\ b)$ は
$$(a,\ b)=(1,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 5),\ (6,\ 6)$$
の 6 個である．求める確率は
$$\frac{6}{6^2} = \mathbf{\frac{1}{6}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$
である．

(3) $\triangle$OAB は $\angle$AOB $= 90^\circ$ の直角三角形であり，内接円の半径 r は

$$\begin{aligned} r &= \frac{1}{2}(\mathrm{OA}+\mathrm{OB}-\mathrm{AB}) \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2+\left(\frac{1}{b}\right)^2}\right) \\ &= \frac{b+a-\sqrt{b^2+a^2}}{2ab} \end{aligned}$$

である．r が有理数となるのは a^2+b^2 が平方数のときであり，組 $(a,\ b)$ は

$$(a,\ b)=(3,\ 4),\ (4,\ 3)$$

の 2 個である．求める確率は

$$\frac{2}{6^2}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{18}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．