n 人でグー，チョキ，パーによるジャンケンを 1 回行う．あいこになる確率が 0.5 以下となる n の最大値を求めなさい．

(23 公立千歳科技大 理工 1(7))

【答】 4

【解答】

n 人のジャンケンで勝者が出るのは 2 種類の手が出るときである．n 人が同じ手を出す場合の除くことに注意するとあいこになる確率は

$$1-(\text{勝者が出る確率})=1-\frac{{}_3\mathrm{C}_2(2^n-2)}{3^n}=1-\frac{2^n-2}{3^{n-1}}$$

である．この確率が 0.5 以下となるのは

$$\begin{aligned}
&1-\frac{2^n-2}{3^{n-1}}\leqq\frac{1}{2}\\
&\frac{1}{2}\leqq\frac{2^n-2}{3^{n-1}}\\
&3^{n-1}\leqq 2(2^n-2)\\
&4\leqq 2^{n+1}-3^{n-1}\qquad\cdots\cdots(*)
\end{aligned}$$

右辺の値を表にすると

n	1	2	3	4	5	$\cdots$
2^{n+1}	4	8	16	32	64	$\cdots$
3^{n-1}	1	3	9	27	81	$\cdots$
$2^{n+1}-3^{n-1}$	3	5	7	5	-18	$\cdots$

$n\geqq 5$ のとき

$$\begin{aligned}
2^{n+1}-3^{n-1}&=\left\{4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}-1\right\}\cdot 3^{n-1}\\
&\leqq\left\{4\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{5-1}-1\right\}\cdot 3^{n-1}\quad\left(\because\ \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\text{ は } n \text{ について単調減少}\right)\\
&=\left(\frac{64}{81}-1\right)\cdot 3^{n-1}<0
\end{aligned}$$

であり，$(*)$ を満たすのは $n=2,\ 3,\ 4$ のときである．

よって，n の最大値は

$$\boldsymbol{n=4}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- n 人のジャンケンであいこになるのは,「1 人勝つ，2 人勝つ，$\cdots$，$n-1$ 人勝つ」の余事象である．誰がどの手で勝つかを考えると

$$\begin{aligned}
&1-(\text{勝者が出る確率})\\
&=1-\left(\frac{{}_n\mathrm{C}_1\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{3^n}+\frac{{}_n\mathrm{C}_2\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{3^n}+\cdots+\frac{{}_n\mathrm{C}_{n-1}\cdot{}_3\mathrm{C}_1}{3^n}\right)\\
&=1-\frac{{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_{n-1}}{3^{n-1}}\\
&=1-\frac{(1+1)^n-{}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_n}{3^{n-1}}\quad(\because\ \text{二項定理})\\
&=1-\frac{2^n-2}{3^{n-1}}
\end{aligned}$$

となる．