n を自然数とする．中が見えない壺に，n 個の赤玉と n 個の白玉が入っている．この壺の中から n 個の玉を同時に取り出すとき，取り出した白玉が k 個以下となる確率を $P_{n,k}$ と書く．このとき，$P_{4,0} = \boxed{\text{ウ}}$ であり，$P_{5,1} = \boxed{\text{エ}}$ であり，$P_{6,2} = \boxed{\text{オ}}$ である．ただし，すべて既約分数で解答せよ．

(23 山梨大 後 医 1(2))

【答】

ウ	エ	オ
$\dfrac{1}{70}$	$\dfrac{13}{126}$	$\dfrac{131}{462}$

【解答】

n 個の赤玉と n 個の白玉が入っている壺から n 個の玉を取り出すとき，取り出した白玉の個数が l $(0 \leqq l \leqq n)$ となる確率は

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_l \cdot {}_n\mathrm{C}_{n-l}}{{}_{2n}\mathrm{C}_n} = \frac{({}_n\mathrm{C}_l)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$$

だから，題意の確率 $P_{n,k}$ は

$$P_{n,k} = \sum_{l=0}^{k} \frac{({}_n\mathrm{C}_l)^2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$$

である．よって

$$P_{4,0} = \sum_{l=0}^{0} \frac{({}_4\mathrm{C}_l)^2}{{}_8\mathrm{C}_4} = \frac{({}_4\mathrm{C}_0)^2}{{}_8\mathrm{C}_4} = \frac{1^2}{\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \boldsymbol{\frac{1}{70}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$P_{5,1} = \sum_{l=0}^{1} \frac{({}_5\mathrm{C}_l)^2}{{}_{10}\mathrm{C}_5} = \frac{({}_5\mathrm{C}_0)^2 + ({}_5\mathrm{C}_1)^2}{{}_{10}\mathrm{C}_5}$$

$$= \frac{1^2 + 5^2}{\dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \frac{1+25}{252} = \boldsymbol{\frac{13}{126}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$P_{6,2} = \sum_{l=0}^{2} \frac{({}_6\mathrm{C}_l)^2}{{}_{12}\mathrm{C}_6} = \frac{({}_6\mathrm{C}_0)^2 + ({}_6\mathrm{C}_1)^2 + ({}_6\mathrm{C}_2)^2}{{}_{12}\mathrm{C}_6}$$

$$= \frac{1^2 + 6^2 + \left(\dfrac{6\cdot5}{2\cdot1}\right)^2}{\dfrac{12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7}{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}} = \frac{1+36+225}{924} = \boldsymbol{\frac{131}{462}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．