1 から 10 までの整数が 1 つずつ重複せずに書かれた 10 枚のカードがある．この中から同時に 4 枚のカートを取り出すとき，取り出したカードに書かれている数の和が 20 以下となる確率を求めよ．

(23 山梨大 後 医 3)

【答】 $\dfrac{8}{21}$

【解答】

1 から 10 までの整数が書かれた 10 枚のカードの中から同時に 4 枚のカードを取り出すとき，取り出し方の総数は

$${}_{10}\mathrm{C}_4 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 210\ (\text{通り})$$

である．

取り出された 4 枚のカードに書かれた数を $a,\ b,\ c,\ d$ とし

$$\begin{cases} a+b+c+d \leqq 20 \\ a<b<c<d \end{cases}$$

を満たすものを数える．

まず，a のとりうる値の範囲は

$$\begin{aligned} &a+b+c+d \\ &\qquad \geqq a+(a+1)+(a+2)+(a+3) \\ \therefore\quad &20 \geqq 4a+6 \end{aligned}$$

a は 1 以上の整数であるから

$$a=1,\ 2,\ 3$$

である．$3\leqq c<d\leqq 10$ を満たす $c+d$ の値は右表となる．

$c+d$ の表

c＼d	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1										
2										
3				7	8	9	10	11	12	13
4					9	10	11	12	13	14
5						11	12	13	14	15
6							13	14	15	16
7								15	16	17
8									17	18
9										19

(i) $a=1$ のとき

b のとりうる値の範囲は

$$\begin{aligned} &a+b+c+d \geqq 1+b+(b+1)+(b+2) \\ &\therefore\quad 20\geqq 3b+4 \qquad \therefore\quad b=2,\ 3,\ 4,\ 5 \end{aligned}$$

である．

(ア) $(a,\ b)=(1,\ 2)$ のとき

$3\leqq c<d\leqq 10$ かつ $c+d\leqq 17$ を満たす組 $(c,\ d)$ は，$c=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$ のときを数えて

$$7+6+5+4+3+1=26\ (\text{通り})$$

(イ) $(a,\ b)=(1,\ 3)$ のとき

$4\leqq c<d\leqq 10$ かつ $c+d\leqq 16$ を満たす組 $(c,\ d)$ は

$$6+5+4+2=17\ (\text{通り})$$

(ウ) $(a,\ b)=(1,\ 4)$ のとき

$5\leqq c<d\leqq 10$ かつ $c+d\leqq 15$ を満たす組 $(c,\ d)$ は

$$5+3+1=9\ (\text{通り})$$

(エ) $(a,\ b)=(1,\ 5)$ のとき

$6\leqq c<d\leqq 10$ かつ $c+d\leqq 14$ を満たす組 $(c,\ d)$ は

$$2\ (\text{通り})$$

(ii) $a=2$ のとき
b のとりうる値の範囲は

$$a+b+c+d \geqq 2+b+(b+1)+(b+2)$$
$$\therefore \quad 20 \geqq 3b+5 \qquad \therefore \quad b=3,\ 4,\ 5$$

である．

(ア) $(a,\ b)=(2,\ 3)$ のとき
$4 \leqq c < d \leqq 10$ かつ $c+d \leqq 15$ を満たす組 $(c,\ d)$ は

$$6+5+3+1=15 \ (\text{通り})$$

(イ) $(a,\ b)=(2,\ 4)$ のとき
$5 \leqq c < d \leqq 10$ かつ $c+d \leqq 14$ を満たす組 $(c,\ d)$ は

$$4+2=6 \ (\text{通り})$$

(ウ) $(a,\ b)=(2,\ 5)$ のとき
$6 \leqq c < d \leqq 10$ かつ $c+d \leqq 13$ を満たす組 $(c,\ d)$ は

$$1 \ (\text{通り})$$

(iii) $a=3$ のとき
b のとりうる値の範囲は

$$a+b+c+d \geqq 3+b+(b+1)+(b+2)$$
$$\therefore \quad 20 \geqq 3b+6 \qquad \therefore \quad b=4$$

である．
$(a,\ b)=(3,\ 4)$ のとき
$5 \leqq c < d \leqq 10$ かつ $c+d \leqq 13$ を満たす組 $(c,\ d)$ は

$$3+1=4 \ (\text{通り})$$

以上 (i)〜(iii) から，$a+b+\mathrm{c}+d \leqq 20$ を満たす組の総数は

$$(26+17+9+2)+(15+6+1)+4=80 \ (\text{通り})$$

であり，求める確率は

$$\frac{80}{210}=\boldsymbol{\frac{8}{21}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．