100 枚のカードに 1 から 100 までの整数が 1 枚につき 1 つずつ書かれている．この 100 枚のカードを次のようにして 3 つの箱 A，B，C に分けて入れる：

- 3 で割り切れる奇数が書かれたカードはすべて箱 A に入れる．
- 3 で割り切れない偶数が書かれたカードはすべて箱 B に入れる．
- 箱 A にも箱 B にも入れられなかったカードはすべて箱 C に入れる．

このとき，次の問いに答えよ．

(1) 箱 A から無作為に取り出した 1 枚のカードに書かれている数が 7 の倍数である確率を求めよ．

(2) 箱 A と箱 B からそれぞれ 1 枚ずつカードを無作為に取り出すとき，取り出された 2 枚のカードに書かれている数の積が 49 の倍数である確率を求めよ．

(3) 箱 A，箱 B，箱 C からそれぞれ 1 枚ずつカードを無作為に取り出すとき，取り出された 3 枚のカードに書かれている数がすべて 7 の倍数である確率を求めよ．

(23 岩手大 教育・農 2)

【答】

(1) $\dfrac{2}{17}$

(2) $\dfrac{25}{578}$

(3) $\dfrac{5}{2023}$

【解答】

(1) 1 から 100 までの整数のうち k で割り切れるものの個数を N_k と表すと

$$N_k = \left[\frac{100}{k}\right]$$

である．ここで，$[x]$ は x を超えない最大な整数を表すものとする．

3 で割り切れる奇数とは,「3 の倍数だが 6 の倍数でない数」のことだから，箱 A に入るカードの枚数は

$$N_3 - N_6 = \left[\frac{100}{3}\right] - \left[\frac{100}{6}\right] = 33 - 16 = 17 \text{ (枚)}$$

である．

3 で割り切れる奇数のうち 7 の倍数であるのは,「21 の倍数だが 42 の倍数ではない数」であり，箱 A に入っていて 7 の倍数が書かれているカードの枚数は

$$N_{21} - N_{42} = \left[\frac{100}{21}\right] - \left[\frac{100}{42}\right] = 4 - 2 = 2 \text{ (枚)}$$

である．

よって，箱 A から無作為に取り出した 1 枚のカードに書かれている数が 7 の倍数である確率は

$$\boldsymbol{\frac{2}{17}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 箱 A と箱 B からそれぞれ 1 枚ずつカードを無作為に取り出すとき，取り出された 2 枚のカードに書かれている数の積が 49 の倍数であるのは，箱 A，B から 1 枚ずつ取り出したカードに書かれた数が

- 両方とも 7 の倍数である
- 一方の数は 7 の倍数でなく，他方の数は 49 の倍数である

の 2 通りがある．

3 で割り切れない偶数とは「2 の倍数だが 6 の倍数でない数」のことだから，箱 B に入るカードの枚数は

$$N_2 - N_6 = \left[\frac{100}{2}\right] - \left[\frac{100}{6}\right] = 50 - 16 = 34 \text{ (枚)}$$

である．

3 で割り切れない偶数のうち 7 の倍数であるのは「14 の倍数だが 42 の倍数ではない数」であり，箱 B に入っていて 7 の倍数が書かれているカードの枚数は

$$N_{14} - N_{42} = \left[\frac{100}{14}\right] - \left[\frac{100}{42}\right] = 7 - 2 = 5 \text{ (枚)}$$

である．

したがって，箱 A，B から 1 枚ずつ取り出したカードに書かれた数が両方とも 7 の倍数である確率は

$$\frac{2}{17} \cdot \frac{5}{34} = \frac{5}{17^2}$$

である．

また，1 から 100 までの整数のうち 49 の倍数は 49 と 98 だけで，49 が書かれたカードは箱 C に入り，98 が書かれたカードは箱 B に入るから，一方の数は 7 の倍数でなく，他方の数は 49 の倍数であるのは，箱 A から 7 の倍数でないカードを取り出し，かつ箱 B から 98 が書かれたカードが取り出すときである．この確率は

$$\left(1 - \frac{2}{17}\right) \cdot \frac{1}{34} = \frac{15}{17^2 \cdot 2}$$

である．

以上より，箱 A，B から 1 枚ずつ取り出したカードに書かれた数の積が 49 の倍数となる確率は

$$\frac{5}{17^2} + \frac{15}{17^2 \cdot 2} = \mathbf{\frac{25}{578}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) (1)，(2) より，箱 C に入るカードの枚数は

$$100 - 17 - 34 = 49 \text{ (枚)}$$

である．

また箱 A，箱 B に入るカードのうち 7 の倍数が書かれているカードはそれぞれ 2 枚と 5 枚であるから，箱 C に入る 7 の倍数が書かれているカードの枚数は

$$N_7 - 2 - 5 = \left[\frac{100}{7}\right] - 2 - 5 = 14 - 2 - 5 = 7 \text{ (枚)}$$

である．

よって，箱 A，B，C から 1 枚ずつ取り出したカードがすべて 7 の倍数である確率は

$$\frac{2}{17} \cdot \frac{5}{34} \cdot \frac{7}{49} = \frac{5}{17^2 \cdot 7} = \mathbf{\frac{5}{2023}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．