大袋に赤球 5 個と白球 1 個が，小袋に赤球 2 個と白球 2 個が入っている．各袋から 1 個ずつ球を取り出して，色を確かめずに，それぞれ出した袋と逆の袋に入れる．その後でさらに，各袋から 1 個ずつ球を取り出すとき，最後に出した 2 個の球が同じ色である確率を求めよ．

(23 三重大 医 1(3))

【答】 $\dfrac{37}{72}$

【解答】

1 回目の操作の結果，大袋と小袋の球の個数は次のいずれかになる．

A： 大袋 （赤球 6 個，白球 0 個)，小袋 （赤球 1 個，白球 3 個)
B： 大袋 （赤球 4 個，白球 2 個)，小袋 （赤球 3 個，白球 1 個)
C： 大袋 （赤球 5 個，白球 1 個)，小袋 （赤球 2 個，白球 2 個)

1 回目の操作で A，B，C になる確率をそれぞれ p_{A}，p_{B}，p_{C} とおくと

$$p_{\mathrm{A}} = \underset{\text{大袋白}}{\frac{1}{6}} \cdot \underset{\text{小袋赤}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{12}$$

$$p_{\mathrm{B}} = \underset{\text{大袋赤}}{\frac{5}{6}} \cdot \underset{\text{小袋白}}{\frac{2}{4}} = \frac{5}{12}$$

$$p_{\mathrm{C}} = \underset{\text{大袋赤}}{\frac{5}{6}} \cdot \underset{\text{小袋赤}}{\frac{2}{4}} + \underset{\text{大袋白}}{\frac{1}{6}} \cdot \underset{\text{小袋白}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$\left(\text{あるいは } 1-(p_{\mathrm{A}}+p_{\mathrm{B}}) = 1-\left(\frac{1}{12}+\frac{5}{12}\right) = \frac{1}{2}\right)$$

である．

次に，A，B，C の各状態からそれぞれの袋から同じ色の球を取り出す確率を q_{A}，q_{B}，q_{C} とおくと

$$q_{\mathrm{A}} = \underset{\text{大袋赤}}{1} \cdot \underset{\text{小袋赤}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}$$

$$q_{\mathrm{B}} = \underset{\text{大袋赤}}{\frac{4}{6}} \cdot \underset{\text{小袋赤}}{\frac{3}{4}} + \underset{\text{大袋白}}{\frac{2}{6}} \cdot \underset{\text{小袋白}}{\frac{1}{4}} = \frac{7}{12}$$

$$q_{\mathrm{C}} = \underset{\text{大袋赤}}{\frac{5}{6}} \cdot \underset{\text{小袋赤}}{\frac{2}{4}} + \underset{\text{大袋白}}{\frac{1}{6}} \cdot \underset{\text{小袋白}}{\frac{2}{4}} = \frac{1}{2}$$

であるから，求める確率は

$$\begin{aligned}
&p_{\mathrm{A}}q_{\mathrm{A}} + p_{\mathrm{B}}q_{\mathrm{B}} + p_{\mathrm{C}}q_{\mathrm{C}} \\
&= \frac{1}{12}\cdot\frac{1}{4} + \frac{5}{12}\cdot\frac{7}{12} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \\
&= \frac{3+35+36}{144} \\
&= \boldsymbol{\frac{37}{72}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}$$

である．