袋に 9 枚のカードが入っており，それらのカードには 1 から 9 までの整数が 1 枚につき 1 つ書かれている．ただし，2 枚以上のカードに同じ整数が書かれていないものとする．この袋から 2 枚のカードを同時に取り出し空の箱 A に入れる．次に残った 7 枚のカードから 3 枚のカードを同時に取り出し空の箱 B に入れる．最後に残った 4 枚のカードを空の箱 C に入れる．以下の空欄をうめよ．

(1) 箱 A に偶数が書かれたカードが 1 枚と奇数が書かれたカードが 1 枚入り，箱 B に偶数が書かれたカードが 1 枚と奇数が書かれたカードが 2 枚入る確率は $\boxed{\text{イ}}$ である．

(2) 箱に入ったカードの整数の積が，どの箱でも偶数になる確率は $\boxed{\text{ロ}}$ である．

(3) 箱 A に入ったカードの整数の和と，箱 B に入ったカードの整数の和と，箱 C に入ったカードの整数の和がすべて等しくなる確率は $\boxed{\text{ハ}}$ である．

(4) 箱に入ったカードの整数の積が，どの箱でも偶数であったときに，箱 A に入ったカードの整数の和と，箱 B に入ったカードの整数の和と，箱 C に入ったカードの整数の和がすべて等しくなる確率は $\boxed{\text{ニ}}$ である．

(23 会津大 コンピュータ理工 3)

【答】

イ	ロ	ハ	ニ
$\frac{2}{7}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{1}{210}$	$\frac{1}{180}$

【解答】

(1) 9 枚のカードの中から箱 A に入れるカード 2 枚の取り出し方は

$$ {}_9\mathrm{C}_2 = \frac{9\cdot 8}{2\cdot 1} = 9\cdot 4 \quad \text{通り} $$

あり，これらは同様に確からしい．このうち，偶数が書かれたカードが 1 枚と奇数が書かれたカードが 1 枚を取り出す取り出し方は，9 枚のカードの中に偶数が書かれたカードは 4 枚，奇数が書かれたカードは 5 枚あるから

$$ {}_4\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_1 = 4\cdot 5 \quad \text{通り} $$

がある．

次に残った 7 枚のカードの中から箱 B に入れるカード 3 枚の取り出し方は

$$ {}_7\mathrm{C}_3 = \frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1} = 7\cdot 5 \quad \text{通り} $$

あり，これらは同様に確からしい．このうち，偶数が書かれたカードを 1 枚と奇数が書かれたカードを 2 枚取り出す取り出し方は，7 枚のカードの中に偶数が書かれたカードが 3 枚と奇数が書かれたカードが 4 枚があるから

$$ {}_3\mathrm{C}_1\cdot{}_4\mathrm{C}_2 = 3\cdot\frac{4\cdot 3}{2\cdot 1} = 3\cdot 6 \quad \text{通り} $$

がある．

よって，求める確率は

$$ \frac{4\cdot 5}{9\cdot 4}\times\frac{3\cdot 6}{7\cdot 5} = \boldsymbol{\frac{2}{7}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) $$

である．

(2) 箱に入ったカードの整数の積が，どの箱でも偶数になるのは，どの箱にも少なくとも 1 枚偶数が書かれたカードが入ってるときであり，各箱に入るカードの枚数を (偶数の枚数，奇数の枚数) で表すと

(i) A(1, 1)，B(1, 2)，C(2, 2)
(ii) A(1, 1)，B(2, 1)，C(1, 3)
(iii) A(2, 0)，B(1, 2)，C(1, 3)

の 3 通りがあり，これらは排反である．それぞれの確率は

(i) (1) で計算済みであり $\dfrac{2}{7}$

(ii)，(iii) の確率も (i) と同じように計算すると

(ii) $\dfrac{4\cdot 5}{9\cdot 4}\times\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot{}_4\mathrm{C}_1}{7\cdot 5}=\dfrac{4\cdot 5}{9\cdot 4}\times\dfrac{3\cdot 4}{7\cdot 5}=\dfrac{4}{21}$

(iii) $\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2}{9\cdot 4}\times\dfrac{{}_2\mathrm{C}_1\cdot{}_5\mathrm{C}_2}{7\cdot 5}=\dfrac{6}{9\cdot 4}\times\dfrac{2\cdot 10}{7\cdot 5}=\dfrac{2}{21}$

よって，求める確率は

$$\frac{2}{7}+\frac{4}{21}+\frac{2}{21}=\boldsymbol{\frac{4}{7}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 各箱に入ったカードの整数の和は

$$\frac{1+2+\cdots+9}{3}=\frac{9\cdot 10}{2}\cdot\frac{1}{3}=15$$

である．箱 A に入ったカードに書かれている 2 つの整数を a_1，a_2，箱 B に入ったカードに書かれている 3 つの整数を b_1，b_2，b_3，箱 C に入ったカードに書かれている 4 つの整数を c_1，c_2，c_3，c_4 とおく．

$a_1+a_2=15$ となる 2 つの整数のとり方は

$$\{9,\ 6\},\ \{8,\ 7\}$$

の 2 通りがある．

(i) $\{a_1,\ a_2\}=\{9,\ 6\}$ のとき

$b_1+b_2+b_3=15$ となる 3 つの整数のとり方は，$b_k\neq 9,\ 6$ $(k=1,\ 2,\ 3)$ に注意すると

$$\{8,\ 5,\ 2\},\ \{8,\ 4,\ 3\},\ \{7,\ 5,\ 3\}$$

の 3 通りがある．その各々に対し $\{c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4\}$ は 1 通りに決まる．

(ii) $\{a_1,\ a_2\}=\{8,\ 7\}$ のとき

$b_1+b_2+b_3=15$ となる 3 つの整数のとり方は，$b_k\neq 8,\ 7$ $(k=1,\ 2,\ 3)$ に注意すると

$$\{9,\ 5,\ 1\},\ \{9,\ 4,\ 2\},\ \{6,\ 5,\ 4\}$$

の 3 通りがある．その各々に対し $\{c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4\}$ は 1 通りに決まる．

よって，求める確率は

$$\frac{1}{9\cdot 4}\times\frac{3}{7\cdot 5}+\frac{1}{9\cdot 4}\times\frac{3}{7\cdot 5}=\boldsymbol{\frac{1}{210}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) 箱に入ったカードの整数の積が，どの箱も偶数であるという事象を A，箱 A に入ったカードの整数の和と，箱 B に入ったカードの整数の和と，箱 C に入ったカードの整数の和がすべて等しくなるという事象を B とおくと，求める確率は

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$$

である．(3) において，$A\cap B$ となるのは

(i) $\{a_1,\ a_2\}=\{9,\ 6\}$ のとき，$\{b_1,\ b_2,\ b_3\}=\{8,\ 5,\ 2\},\ \{8,\ 4,\ 3\}$
(ii) $\{a_1,\ a_2\}=\{8,\ 7\}$ のとき，$\{b_1,\ b_2,\ b_3\}=\{9,\ 4,\ 2\},\ \{6,\ 5,\ 4\}$

であり，求める確率は

$$P_A(B)=\frac{\dfrac{1}{9\cdot 4}\times\dfrac{2}{7\cdot 5}+\dfrac{1}{9\cdot 4}\times\dfrac{2}{7\cdot 5}}{\dfrac{4}{7}}=\frac{1}{9\cdot 7\cdot 5}\times\frac{7}{4}=\boldsymbol{\frac{1}{180}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．