n を 2 以上の自然数とする．1 個のさいころを n 回投げて出た目の数を順に a_1，a_2，$\cdots$，a_n とし，

$$K_n = |1-a_1| + |a_1-a_2| + \cdots + |a_{n-1}-a_n| + |a_n-6|$$

とおく．また，K_n のとりうる値の最小値を q_n とする．

(1) $K_2 = 5$ となる確率を求めよ．
(2) $K_3 = 5$ となる確率を求めよ．
(3) q_n を求めよ．また，$K_n = q_n$ となるための a_1，a_2，$\cdots$，a_n に関する必要十分条件を求めよ．

(23 北海道大 文 3)

【答】

(1) $\dfrac{7}{12}$
(2) $\dfrac{7}{27}$
(3) $q_n = 5$，$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq a_n$

【解答】

$$K_n = |1-a_1| + |a_1-a_2| + \cdots + |a_{n-1}-a_n| + |a_n-6|$$

(1) $n=2$ のとき，a_1，a_2 は 1 以上 6 以下の自然数であるから

$$\begin{aligned} K_2 &= |1-a_1| + |a_1-a_2| + |a_2-6| \\ &= (a_1-1) + |a_1-a_2| + (6-a_2) \\ &= 5 + a_1 - a_2 + |a_1-a_2| \\ &= \begin{cases} 5 & (a_1 \leqq a_2 \text{ のとき}) \\ 5+2(a_1-a_2) & (a_1 > a_2 \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

である．組 $(a_1,\ a_2)$ は全部で 6^2 通りあり，これらの起こり方は同様に確からしい．このうち，$K_2 = 5$ となるのは $a_1 \leqq a_2$ を満たすものであり，a_2 の値に対して，a_1 の値は 1，2，$\cdots$，a_2 の a_2 通りあるから，条件を満たす組 $(a_1,\ a_2)$ は全部で

$$\sum_{a_2=1}^{6} a_2 = \frac{6\cdot 7}{2} = 21 \text{ (通り)}$$

ある．よって，求める確率は

$$\frac{21}{6^2} = \boldsymbol{\frac{7}{12}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $a_1 \leqq a_2$ を満たす組 $(a_1,\ a_2)$ の総数は

  $a_1 < a_2$ となるものが　${}_6\mathrm{C}_2 = \dfrac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = 15$ (通り)

  $a_1 = a_2$ となるものが　6 (通り)

  であるから，全部で

  $15 + 6 = 21$ (通り)

  である．
- $a_1 \leqq a_2$ を満たす組 $(a_1,\ a_2)$ の総数は

  ${}_6\mathrm{H}_2 = {}_{6+2-1}\mathrm{C}_2 = \dfrac{7\cdot 6}{2\cdot\ \ 1} = 21$ (通り)

  である．

(2) $n=3$ のとき，a_1，a_2，a_3 は 1 以上 6 以下の自然数であるから

$$\begin{aligned}K_3 &= |1-a_1|+|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+|a_3-6| \\ &= (a_1-1)+|a_1-a_2|+|a_2-a_3|+(6-a_3) \\ &= 5+a_1-a_3+|a_1-a_2|+|a_2-a_3| \\ &= \begin{cases} 5 & (a_1-a_2 \leqq 0 \text{ かつ } a_2-a_3 \leqq 0 \text{ のとき}) \\ 5+2(a_2-a_3) & (a_1-a_2 \leqq 0 \text{ かつ } a_2-a_3 > 0 \text{ のとき}) \\ 5+2(a_1-a_2) & (a_1-a_2 > 0 \text{ かつ } a_2-a_3 \leqq 0 \text{ のとき}) \\ 5+2(a_1-a_3) & (a_1-a_2 > 0 \text{ かつ } a_2-a_3 > 0 \text{ のとき}) \end{cases}\end{aligned}$$

である．組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ は全部で 6^3 通りあり，これらの起こり方は同様に確からしい．このうち，$K_3=5$ となるのは $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ を満たすものであり，a_2 の値に対して，a_1 の値は $1,\ 2,\ \cdots,\ a_2$ の a_2 通り，a_3 の値は $a_2,\ a_2+1,\ \cdots,\ 6$ の $7-a_2$ 通りあるから，条件を満たす組 $(a_1,\ a_2)$ は全部で

$$\sum_{a_2=1}^{6} a_2(7-a_2) = 7\cdot\frac{6\cdot 7}{2} - \frac{6\cdot 7\cdot 13}{6} = 7(21-13) = 56 \text{ (通り)}$$

ある．よって，求める確率は

$$\frac{56}{6^3} = \boldsymbol{\frac{7}{27}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ を満たす組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の総数は

  $a_1 < a_2 < a_3$ となるものが　${}_6\mathrm{C}_3 = \dfrac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1} = 20$ (通り)

  $a_1 = a_2 < a_3$ となるものが　${}_6\mathrm{C}_2 = \dfrac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = 15$ (通り)

  $a_1 < a_2 = a_3$ となるものが　${}_6\mathrm{C}_2 = \dfrac{6\cdot 5}{2\cdot 1} = 15$ (通り)

  $a_1 = a_2 = a_3$ となるものが　6 (通り)

  であるから，全部で

  $$20+15+15+6 = 56 \text{ (通り)}$$

  である．
- $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ を満たす組 $(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の総数は

  $${}_6\mathrm{H}_3 = {}_{6+3-1}\mathrm{C}_3 = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3\cdot 2\cdot 1} = 56 \text{ (通り)}$$

  である．

(3) 実数 x，y に対して，次の不等式が成り立つ．

$$|x|+|y| \geqq |x+y| \quad (\text{三角不等式})$$

ここで，等号が成り立つのは x と y が同符号のときである．

この不等式を繰り返し用いると

$$\begin{aligned}K_n &= |1-a_1|+|a_1-a_2|+\cdots+|a_{n-1}-a_n|+|a_n-6| \\ &\geqq |(1-a_1)+(a_1-a_2)+\cdots+(a_{n-1}-a_n)+(a_n-6)| \\ &= |1-6| \\ &= 5\end{aligned}$$

である．$1-a_1 \leqq 0$，$a_n-6 \leqq 0$ より，等号が成り立つのは

$$a_k - a_{k+1} \leqq 0 \quad (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

すなわち

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq a_n$$

が成り立つときである．

よって，K_n の最小値 q_n は

$$\boldsymbol{q_n = 5} \qquad \cdots\cdots(答)$$

であり，$K_n = q_n = 5$ となるための必要十分条件は

$$\boldsymbol{a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq a_n} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

- (1)，(2) より K_n は

  「$K_n \geqq 5$ であり，等号は $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq a_n$ のとき成り立つ」…… $(*)$

  ことが推測される．$(*)$ が成り立つことを数学的帰納法で示す．

  (i) $n = 2$ のとき

  $$K_2 = \begin{cases} 5 & (a_1 \leqq a_2 \text{ のとき}) \\ 5 + 2(a_1 - a_2) & (a_1 > a_2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

  であり，$a_1 > a_2$ のとき，$K_2 > 5$ であるから，$n = 2$ のとき $(*)$ は成り立つ．

  (ii) $n = m$ での成立を仮定すると

  $$\begin{aligned} K_{m+1} &= |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + \cdots + |a_{m-1} - a_m| + |a_m - a_{m+1}| + |a_{m+1} - 6| \\ &= |1 - a_1| + |a_1 - a_2| + \cdots + |a_{m-1} - a_m| + |a_m - 6| - |a_m - 6| \\ &\qquad + |a_m - a_{m+1}| + |a_{m+1} - 6| \\ &= K_m - |a_m - 6| + |a_m - a_{m+1}| + |a_{m+1} - 6| \\ &= K_m + (a_m - 6) + |a_m - a_{m+1}| - (a_{m+1} - 6) \\ &= K_m + a_m - a_{m+1} + |a_m - a_{m+1}| \\ &= \begin{cases} K_m & (a_m \leqq a_{m+1} \text{ のとき}) \\ K_m + 2(a_m - a_{m+1}) & (a_m > a_{m+1} \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

  である．

  $a_m > a_{m+1}$ のとき，$2(a_m - a_{m+1}) > 0$ であるから $K_{m+1} > K_m$ である．

  $a_m \leqq a_{m+1}$ のとき，$K_{m+1} = K_m$ である．

  帰納法の仮定とあわせると

  $K_{m+1} \geqq K_m \geqq 5$ であり，$K_{m+1} = 5$ となるのは

  $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{m-1} \leqq a_m$ かつ $a_m \leqq a_{m+1}$ のときである．

  すなわち

  $K_{m+1} \geqq 5$ であり，等号は

  $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{m-1} \leqq a_m \leqq a_{m+1}$ のとき成り立つ．

  $k = m + 1$ のときも $(*)$ は成り立つ．

  以上，(i)，(ii) より，2 以上のすべて自然数に対して $(*)$ は成り立つ．

  よって，K_n の最小値 q_n は

  $$q_n = 5$$

  であり，$K_n = q_n = 5$ となるための必要十分条件は

  $$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{n-1} \leqq a_n$$

  である．