a は $0 \leqq a \leqq 18$ を満たす整数とする．18 本のくじの中に，当たりが a 本あり，はずれが $(18-a)$ 本ある．この 18 本のくじから 1 本を引き，引いたくじをもとに戻す．この試行を 6 回繰り返すとき，次の確率 $(*)$ を $P(a)$ とする．

$(*)$ 1 回目と 6 回目がともに当たりであり，かつ 6 回の間に当たりが 3 回以上は続かない確率

次の問いに答えよ．

(1) $p = \dfrac{a}{18}$ とおくとき，$P(a)$ を p を用いて表せ．

(2) $0 \leqq a \leqq 18$ を満たす整数 a において，$P(a)$ が最大となる a の値を求めよ．

(23 弘前大 人文・教育・医・農 2)

【答】

(1) $P(a) = p^2(1-p)^2(1+p)^2$

(2) $a = 10$

【解答】

(1) 当たりを○，はずれを×で表す． $(*)$ を満たすのは

(i) 2 回目から 5 回目までは，すべてがはずれのとき

○××××○

であり，このときの確率は　$p^2(1-p)^4$　である．

(ii) 2 回目から 5 回目までは，あたりが 1 回はずれが 3 回のとき

○○×××○
○×○××○
○××○×○
○×××○○

であり，このときの確率は　$4p^3(1-p)^3$　である．

(iii) 2 回目から 5 回目までは，あたりが 2 回はずれが 2 回のとき

○○×○×○
○○××○○
○×○○×○
○×○×○○

であり，このときの確率は　$4p^4(1-p)^4$　である．

(i)，(ii)，(iii) は排反であるから，求める確率 $P(a)$ は

$$\begin{aligned} P(a) &= p^2(1-p)^4 + 4p^3(1-p)^3 + 4p^4(1-p)^2 \\ &= p^2(1-p)^2\{(1-p)^2 + 4p(1-p) + 4p^2\} \\ &= p^2(1-p)^2(1+2p+p^2) \\ &= \boldsymbol{p^2(1-p)^2(1+p)^2} \end{aligned}$$

……(答)

である．

(2) $p = \dfrac{a}{18}$ なので

$$\begin{aligned} P(a) &= \{p(1-p)(1+p)\}^2 \\ &= \left\{\frac{a}{18}\left(1-\frac{a}{18}\right)\left(1+\frac{a}{18}\right)\right\}^2 \\ &= \frac{\{a(18-a)(18+a)\}^2}{18^6} \end{aligned}$$

である．a は $0 \leqq a \leqq 18$ を満たす整数であり，$f(a) = a(18-a)(18+a)$ とおくと，$P(a)$ が最大となる整数 a と $f(a)$ が最大となる a は一致する．

a を $0 \leqq a \leqq 18$ を満たす実数とするとき

$$f'(a) = 18^2 - 3a^2 = 3(6\sqrt{3} - a)(6\sqrt{3} + a)$$

であり，$f(a)$ は $a = 6\sqrt{3}$ のとき極大かつ最大になる．$6\sqrt{3} = \sqrt{108}$ より $10 < 6\sqrt{3} < 11$ である．

$$f(10) = 10 \cdot 8 \cdot 28 = 2240,$$
$$f(11) = 11 \cdot 7 \cdot 29 = 2233$$

であるから，$a = 10$ のとき $f(a)$ は最大となる．

よって，$P(a)$ が最大となる a の値は

$$\boldsymbol{a = 10} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．