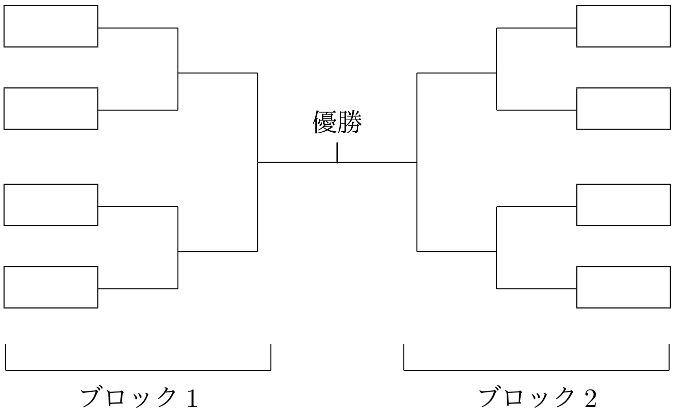
A, B, C, D, E, F, G, H の 8 チームが下の図で示すトーナメント方式で競技を行う．A と B の対戦では，どちらが勝つ確率も $\dfrac{1}{2}$ とする．C, D, E, F, G, H の 6 チームのうち，どの 2 チームが対戦する場合にも，両チームとも勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ とする．また，A あるいは B が C, D, E, F, G, H のいずれかと対戦するときに勝つ確率は $\dfrac{2}{3}$ とする．ただし，引き分けは起こらないものとする．このとき，次の問いに答えよ．



□ には A, B, C, D, E, F, G, H のいずれかが入る．

(1) A はブロック 1 に，B はブロック 2 に配置され，C から H の 6 チームは無作為に配置されるとき，A が優勝する確率を求めよ．

(2) A と B も含めた 8 チームが無作為に配置されるとき，A が優勝する確率を求めよ．

(23 東京海洋大 生命・資源 4)

【答】

(1) $\dfrac{64}{243}$

(2) $\dfrac{430}{1701}$

【解答】

(1) A と B が決勝戦で戦うか否かで場合分けして，A が優勝する確率を求める．

ブロック 1 の A が決勝戦へ進むのは 2 回勝ち続けるときで，そのときの対戦チームは C, D, E, F, G, H のいずれかであるから，その確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

である．

(i) ブロック 2 の B も決勝戦へ進み，A が優勝する確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{2^3}{3^4}$$

である．

(ii) ブロック 2 の B が 1 回戦または 2 回戦で負けて ((i) の余事象)，A が優勝する確率は

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right\} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2^2 \cdot (3^2-2^2) \cdot 2}{3^5} = \frac{2^3 \cdot 5}{3^5}$$

である．

(i)，(ii) より，A が優勝する確率は

$$\frac{2^3}{3^4} + \frac{2^3 \cdot 5}{3^5} = \frac{2^3(3+5)}{3^5} = \frac{2^6)}{3^5} = \frac{\mathbf{64}}{\mathbf{243}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) A と B が異なるブロックに配置されるか否かで場合分けして，A が優勝する確率を求める．

A と B が異なるブロックに配置される確率は $\dfrac{4}{7}$，

A と B が同じブロックに配置される確率は $\dfrac{3}{7}$

である．

(I) A と B が異なるブロックに配置され，A が優勝する確率は

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{2^6}{3^5} = \frac{2^8}{3^5 \cdot 7} \quad (\because\ (1))$$

である．

(II) A と B が同じブロックに配置されとき，A と B が 1 回戦で対戦するか否かで場合分けて，A が優勝する確率を求める．

A と B が 1 回戦で対戦する確率は $\dfrac{1}{7}$，

A と B が 1 回戦で対戦しない確率は $\dfrac{2}{7}$

である．A と B が 1 回戦で対戦しないときは，B が 1 回戦で勝つか否かで場合分けする．A が優勝する確率は

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{7} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) + \frac{2}{7} \cdot \left\{\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\right\} \\
&= \frac{2}{3^2 \cdot 7} + \frac{2}{7} \cdot \frac{2^2 \cdot 3 + 2^3}{3^4} \\
&= \frac{18+40}{3^4 \cdot 7} \\
&= \frac{58}{3^4 \cdot 7}
\end{aligned}$$

(I)，(II) より，A が優勝する確率は

$$\frac{2^8}{3^5 \cdot 7} + \frac{58}{3^4 \cdot 7} = \frac{256+174}{3^5 \cdot 7} = \frac{\mathbf{430}}{\mathbf{1701}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．