n を 3 以上の自然数とする．1 個のさいころを n 回投げて，出た目の数の積をとる．積が 60 となる確率を p_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) p_3 を求めよ．

(2) $n \geqq 4$ のとき，p_n を求めよ．

(3) $n \geqq 4$ とする．出た目の数の積が n 回目にはじめて 60 となる確率を求めよ．

(23 熊本大 医 1)

【答】

(1) $\dfrac{1}{18}$

(2) $\dfrac{n(n-1)(n-2)(n+1)}{2 \cdot 6^n}$

(3) $\dfrac{2n(n-1)(n-2)}{6^n}$

【解答】

(1) さいころを 3 回投げたとき，出た目の数の積が 60 となる 3 つの目の組は

$$\{2,\ 5,\ 6\},\ \{3,\ 4,\ 5\}$$

であり，出た目の順序にも注意すると

$$p_3 = \frac{3!+3!}{6^3} = \boldsymbol{\frac{1}{18}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) さいころを n $(n \geqq 4)$ 回投げたとき，出た目の積が 60 となる n 個の目の組は

$$\{2,\ 5,\ 6,\ \underbrace{1,\ 1,\ \cdots,\ 1}_{n-3\ \text{個}}\},\ \{3,\ 4,\ 5,\ \underbrace{1,\ 1,\ \cdots,\ 1}_{n-3\ \text{個}}\},\ \{2,\ 2,\ 3,\ 5,\ \underbrace{1,\ 1,\ \cdots,\ 1}_{n-4\ \text{個}}\}$$

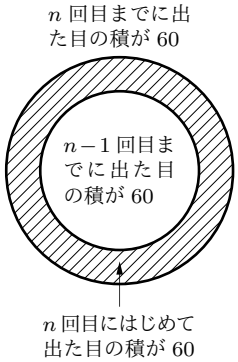
であり，出た目の順序にも注意すると

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{\dfrac{n!}{1!1!1!(n-3)!} + \dfrac{n!}{1!1!1!(n-3)!} + \dfrac{n!}{2!1!1!(n-4)!}}{6^n} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2) + n(n-1)(n-2) + \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2}}{6^n} \\ &= \boldsymbol{\frac{n(n-1)(n-2)(n+1)}{2 \cdot 6^n}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

- (1) の結果と比較すると，これは $n=3$ のときも成り立つ．

(3) 出た目の数の積が n 回目にはじめて 60 となる確率は，n 回目までに出た目の積が 60 となる確率 p_n から，$n-1$ 回目までに出た目の積が 60 となり，かつ n 回に 1 の目が出る確率 $p_{n-1} \cdot \dfrac{1}{6}$ を引いたものである．すなわち



$$\begin{aligned} & p_n - p_{n-1} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n+1)}{2 \cdot 6^n} - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)n}{2 \cdot 6^{n-1}} \cdot \frac{1}{6} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)\{(n+1)-(n-3)\}}{2 \cdot 6^n} \\ &= \boldsymbol{\frac{2n(n-1)(n-2)}{6^n}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

- これは $n=3$ のときも成り立つ．