n を 2 以上の自然数とする．1 個のさいころを n 回投げて，出た目の数の積をとる．積が 12 となる確率を p_n とする．以下の問いに答えよ．

(1) p_2, p_3 を求めよ．
(2) $n \geqq 4$ のとき，p_n を求めよ．
(3) $n \geqq 4$ とする．出た目の数の積が n 回目にはじめて 12 となる確率を求めよ．

(23 熊本大 教育・医・理・工・薬 2)

【答】

(1) $p_2 = \dfrac{1}{9}$, $p_3 = \dfrac{5}{72}$

(2) $p_n = \dfrac{n(n-1)(n+2)}{2 \cdot 6^n}$

(3) $\dfrac{(n-1)(3n+2)}{2 \cdot 6^n}$

【解答】

(1) さいころを 2 回投げたとき，出た目の数の積が 12 となる 2 つの目の組は

$$\{2,\ 6\},\ \{3,\ 4\}$$

であり，出た目の順序にも注意すると

$$p_2 = \frac{2+2}{6^2} = \boldsymbol{\frac{1}{9}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

次に，さいころを 3 回投げたとき，出た目の数の積が 12 となる 3 つの目の組は

$$\{2,\ 6,\ 1\},\ \{3,\ 4,\ 1\},\ \{2,\ 2,\ 3\}$$

であり，出た目の順序にも注意すると

$$p_3 = \frac{3! + 3! + \dfrac{3!}{2!1!}}{6^3} = \boldsymbol{\frac{5}{72}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) さいころを n $(n \geqq 4)$ 回投げたとき，出た目の積が 12 となる n 個の目の組は

$$\{2,\ 6,\ \underbrace{1,\ 1,\ \cdots,\ 1}_{n-2\ \text{個}}\},\ \{3,\ 4,\ \underbrace{1,\ 1,\ \cdots,\ 1}_{n-2\ \text{個}}\},\ \{2,\ 2,\ 3,\ \underbrace{1,\ 1,\ \cdots,\ 1}_{n-3\ \text{個}}\}$$

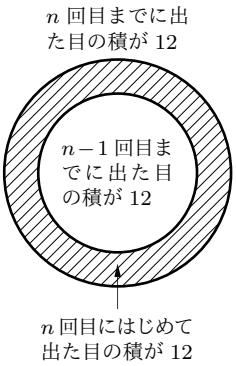
であり，出た目の順序にも注意すると

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{\dfrac{n!}{1!1!(n-2)!} + \dfrac{n!}{1!1!(n-2)!} + \dfrac{n!}{2!1!(n-3)!}}{6^n} \\ &= \frac{n(n-1) + n(n-1) + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{2}}{6^n} \\ &= \boldsymbol{\frac{n(n-1)(n+2)}{2 \cdot 6^n}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．

- (1) の結果と比較すると，これは $n = 2,\ 3$ のときも成り立つ．

(3) 出た目の数の積が n 回目にはじめて 12 となる確率は，n 回目までに出た目の積が 12 となる確率 p_n から，$n-1$ 回目までに出た目の積が 12 となり，かつ n 回に 1 の目が出る確率 $p_{n-1}\cdot\dfrac{1}{6}$ を引いたものである．すなわち



$$
\begin{aligned}
&p_n - p_{n-1}\cdot\frac{1}{6}\\
&= \frac{n(n-1)(n+2)}{2\cdot 6^n} - \frac{(n-1)(n-2)(n+1)}{2\cdot 6^{n-1}}\cdot\frac{1}{6}\\
&= \frac{(n-1)\{(n^2+2n)-(n^2-n-2)\}}{2\cdot 6^n}\\
&= \boldsymbol{\frac{(n-1)(3n+2)}{2\cdot 6^n}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

である．

- これは $n=2,\ 3$ のときも成り立つ．