サイコロを2回振るとき、次の条件が成り立つ確率を求めなさい。

条件

1回目に出た目を a, 2回目に出た目を b とするとき, 0 以上の任意の整数 n に対し $n^2-an+b\geq 0$

が成立する.

(23 福島大 人間発達文化 3(2))

[答] $\frac{7}{12}$

【解答】

 $f(n) = n^2 - an + b$ とおく.

$$f(n) = \left(n - \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + b$$

であり, a, b は

$$1 \le a \le 6, \ 1 \le b \le 6$$

を満たす整数である.

0 以上の整数 n に対して $f(n) \ge 0$ が成立する条件は

$$(f(n)$$
 の最小値) ≥ 0

が成り立つことである. f(n) の最小値 m は

(i) a が偶数のとき

$$m = f\left(\frac{a}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} + b \qquad \cdots$$
 ①

であり、
を満たす a, b は

$$a = 2$$
 のとき, $m = b - 1$ であり, b は $b = 1, 2, \dots, 6$ の 6 通り

$$a = 4$$
 のとき, $m = b - 4$ であり, b は $b = 4$, b , b の a 通り

$$a=6$$
 のとき, $m=b-9$ であり, b は存在しない

から、組(a, b)の個数は

$$6 + 3 + 0 = 9$$

である.

(ii) a が奇数のとき

$$m = f\left(\frac{a\pm 1}{2}\right) = -\frac{a^2}{4} + b + \frac{1}{4} \qquad \cdots \qquad \textcircled{2}$$

であり、② を満たす a, b は

a = 1 のとき, m = b であり, b は $b = 1, 2, \dots, 6$ の 6 通り

$$a = 3$$
 のとき, $m = b - 2$ であり, b は $b = 2, 3, \dots, 6$ の 5 通り

$$a = 5$$
 のとき, $m = b - 6$ であり, $b = 6$ の 1 通り

あるから, 組 (a, b) の個数は

$$6+5+1=12$$

である.

よって, 求める確率は

$$\frac{9+12}{6^2} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12} \qquad \cdots$$
 (答)

である.