5 人でじゃんけんをする．一度じゃんけんで負けた人は，その時点でじゃんけんから抜ける．残りが 1 人になるまでじゃんけんを繰り返す．ただし，あいこの場合も 1 回のじゃんけんを行ったと数える．

(1) 1 回目終了時点でちょうど 4 人が残っている確率を求めよ．
(2) 2 回目終了時点でちょうど 4 人が残っている確率を求めよ．

(23 青森公立大 4)

【答】

(1) $\dfrac{5}{81}$
(2) $\dfrac{50}{729}$

【解答】

(1) 5 人でじゃんけんをするとき，手の出し方は

$$3^5 \text{ (通り)}$$

あり，これらは同様に確からしい．

1 回目終了時点でちょうど 4 人が残っている確率はどの 4 人がどの手で勝つかと考えると

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_4 \cdot {}_3\mathrm{C}_1}{3^5} = \frac{5 \cdot 3}{3^5} = \boldsymbol{\frac{5}{81}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 2 回目終了時点でちょうど 4 人が残っているのは

(i) 1 回目で 5 人残り，2 回目で 4 人が残る
(ii) 1 回目で 4 人残り，2 回目も 4 人が残る

のいずれかであり，これらは排反である．

(i) 1 回目のじゃんけんで勝者が決まるのは 2 種類の手が出るときである．この確率は 2 種類の手を決めて，5 人が同じ手を出す場合を除けばよい．2 回目のじゃんけんで 5 人から 4 人が残る確率は (1) で計算済みであるから

$$\left\{1 - \frac{{}_3\mathrm{C}_2(2^5-2)}{3^5}\right\} \cdot \frac{5}{81} = \left(1 - \frac{3 \cdot 30}{3^5}\right) \cdot \frac{5}{81} = \left(1 - \frac{10}{27}\right) \cdot \frac{5}{81} = \frac{17}{27} \cdot \frac{5}{81}$$

である．

- 1 回目で 5 人残るのは，5 人とも同じ手を出す場合の 3 通りと，5 人が 3 種類の手を出す場合がある．後者は，5 人のうちの 3 人が重複する手を出す場合と，2 人ずつの 2 組が別の重複する手を出す場合があるから

$$\frac{3 + {}_5\mathrm{C}_3 \cdot 3! + \dfrac{{}_5\mathrm{C}_2 \cdot {}_3\mathrm{C}_2}{2} \cdot 3!}{3^5} = \frac{3 + 10 \cdot 6 + 5 \cdot 3 \cdot 6}{3^5} = \frac{51}{3^4} = \frac{17}{27}$$

である．

- 余事象は「1 人だけ勝つ」または「2 人だけ勝つ」または「3 人だけ勝つ」または「4 人勝つ」のいずれかである．だれがどの手で勝つかと考えると

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_1 \cdot 3}{3^5} + \frac{{}_5\mathrm{C}_2 \cdot 3}{3^5} + \frac{{}_5\mathrm{C}_3 \cdot 3}{3^5} + \frac{{}_5\mathrm{C}_4 \cdot 3}{3^5} = \frac{5 + 10 + 10 + 5}{3^4} = \frac{10}{27}$$

であり，1 回目で 5 人残る確率は

$$1 - \frac{10}{27} = \frac{17}{27}$$

である．

(ii) 2 回目の 4 人でのあいこも (i) と同じく考えると

$$\frac{5}{81}\cdot\left\{1-\frac{{}_3\mathrm{C}_2(2^4-2)}{3^4}\right\}=\frac{5}{81}\cdot\left(1-\frac{14}{27}\right)=\frac{5}{81}\cdot\frac{13}{27}$$

- 2 回目で 4 人残る確率は，4 人が同じ手を出す場合の 3 通りと，4 人が 3 種類の手を出す場合を考えればよい．後者は 5 人のうちの 2 人が重複する手を出す場合であるから

$$\frac{3+{}_4\mathrm{C}_2\cdot 3!}{3^4}=\frac{3+6\cdot 6}{3^4}=\frac{13}{27}$$

- 余事象は「1 人だけ勝つ」または「2 人だけ勝つ」または「3 人勝つ」のいずれかである．だれがどの手で勝つかと考えると

$$\frac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot 3}{3^4}+\frac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot 3}{3^4}+\frac{{}_4\mathrm{C}_3\cdot 3}{3^4}=\frac{4+6+4}{3^3}=\frac{14}{27}$$

であり，2 回目で 4 人残る確率は

$$1-\frac{14}{27}=\frac{13}{27}$$

である．

以上，(i)，(ii) より，2 回目終了時点でちょうど 4 人が残っている確率は

$$\frac{17}{27}\cdot\frac{5}{81}+\frac{5}{81}\cdot\frac{13}{27}=\frac{5(17+13)}{27\cdot 81}=\boldsymbol{\frac{50}{729}}$$ ……(答)

である．