(1) 1 枚の硬貨を繰り返し投げるとき，この硬貨の表裏の出方に応じて，座標平面上の点 P が次の**規則 1** に従って移動するものとする．

規則 1

- 点 P は原点 O(0, 0) を出発点とする．
- 点 P の x 座標は，硬貨を投げるごとに 1 だけ増加する．
- 点 P の y 座標は，硬貨を投げるごとに，表が出たら 1 だけ増加し，裏が出たら 1 だけ減少する．

また，点 P の座標を次の**記号**で表す．

記号

硬貨を k 回投げ終えた時点での点 P の座標 $(x,\ y)$ を $(k,\ y_k)$ で表す．

座標平面上の点 P の移動の仕方について，例えば，硬貨を 1 回投げて表が出た場合について考える．このとき，点 P の座標は (1, 1) となる．これを図 1 のように，原点 O(0, 0) と点 (1, 1) をまっすぐな矢印で結ぶ．このようにして点 P の移動の仕方を表す．

以下において，図を使用する際には同じように考えることにする．

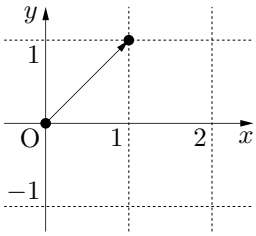


図　1

(i) 硬貨を 3 回投げ終えたとき，点 P の移動の仕方が条件

$$y_1 \geqq -1 \text{ かつ } y_2 \geqq -1 \text{ かつ } y_3 \geqq -1 \qquad \cdots\cdots (*)$$

を満たす確率を求めよう．

条件 $(*)$ を満たす点 P の移動の仕方は図 2 のようになる．例えば点 O(0, 0) から点 A(2, 0) までの点 P の移動の仕方は，点 O(0, 0) から点 (1, 1) まで移動したのち点 A(2, 0) に移動する場合と，点 O(0, 0) から点 (1, −1) まで移動したのち点 A(2, 0) に移動する場合のいずれかであるため，2 通りある．このとき，この移動の仕方の総数である 2 を，**四角囲みの中の数字**で点 A(2, 0) の近くに書く．図 2 における他の四角囲みの中の数字についても同様に考える．

このように考えると，条件 $(*)$ を満たす点 P の移動の仕方のうち，点 (3, 3) に至る移動の仕方は $\boxed{\text{ア}}$ 通りあり，点 (3, 1) に至る移動の仕方は $\boxed{\text{イ}}$ 通りあり，点 (3, −1) に至る移動の仕方は $\boxed{\text{ウ}}$ 通りある．

よって，点 P の移動の仕方が条件 $(*)$ を満たすような硬貨の表裏の出方の総数は

$$\boxed{\text{ア}} + \boxed{\text{イ}} + \boxed{\text{ウ}}$$

である．

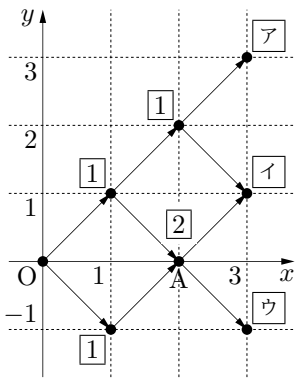


図　2

したがって，点 P の移動の仕方が条件 $(*)$ を満たす確率は

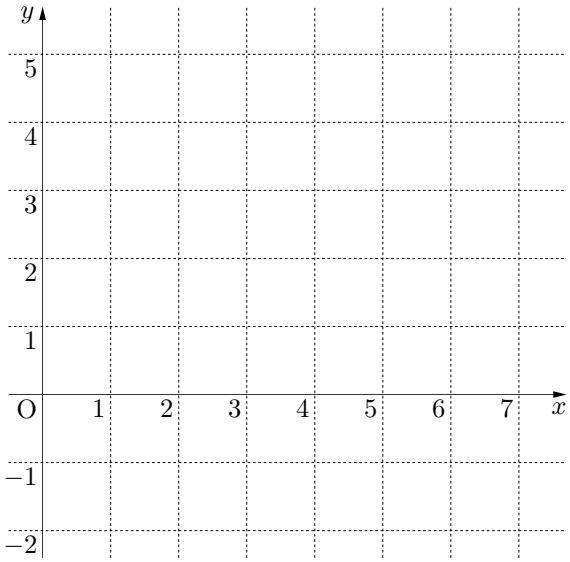
$$\frac{\boxed{\text{ア}}+\boxed{\text{イ}}+\boxed{\text{ウ}}}{2^3}$$

として求めることができる．

(ii) 硬貨を 4 回投げるとする．このとき，(i) と同様に図を用いて考えよう．

$y_1 \geqq 0$ かつ $y_2 \geqq 0$ かつ $y_3 \geqq 0$ かつ $y_4 \geqq 0$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}$ となる．

また，$y_1 \geqq 0$ かつ $y_2 \geqq 0$ かつ $y_3 = 1$ かつ $y_4 \geqq 0$ である確率は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ となる．さらに，$y_1 \geqq 0$ かつ $y_2 \geqq 0$ かつ $y_3 \geqq 0$ かつ $y_4 \geqq 0$ であったとき，$y_3 = 1$ である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$ となる．



参考図

(iii) 硬貨を 4 回投げ終えた時点で点 P の座標が (4, 2) であるとき，点 (4, 2) に至る移動の仕方によらず表の出る回数は $\boxed{\text{コ}}$ 回となり，裏の出る回数は $\left(4-\boxed{\text{コ}}\right)$ 回となる．

(2) 1 個のさいころを繰り返し投げるとき，このさいころの目の出方に応じて，数直線上の点 Q が次の**規則 2** に従って移動するものとする．

規則 2

- 点 Q は原点 O を出発点とする．
- 点 Q の座標は，さいころを投げるごとに，3 の倍数の目が出たら 1 だけ増加し，それ以外の目が出たら 1 だけ減少する．

(i) さいころを 7 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 3 である確率は $\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{スセソ}}}$ となる．

(ii) さいころを 7 回投げる間，点 Q の座標がつねに 0 以上 3 以下であり，かつ 7 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 3 である確率は $\dfrac{\boxed{\text{タチ}}}{\boxed{\text{ツテトナ}}}$ となる．

(iii) さいころを 7 回投げる間，点 Q の座標がつねに 0 以上 3 以下であり，かつ 7 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 3 であったとき，3 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 1 である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ となる．

(23 共通テスト 追・再試験 IA 3)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サシ	スセソ	タチ	ツテトナ
1	3	2	3	8	1	4	2	3	3	28	729	32	2187

ニ	ヌ
3	4

【解答】

(1) (i) $y_1 \geqq -1$ かつ $y_2 \geqq -1$ かつ $y_3 \geqq -1$ …… $(*)$

問題文中の図 2 において和の法則を用いて各点に移動する仕方を数える．条件 $(*)$ を満たす点 P の移動の仕方のうち

点 $(3,\ 3)$ に至る移動の仕方は　**1** 通りあり，　……(答)

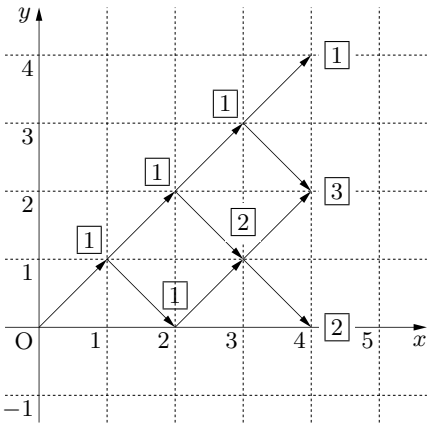
点 $(3,\ 1)$ に至る移動の仕方は　$1+2=$ **3** 通りあり，　……(答)

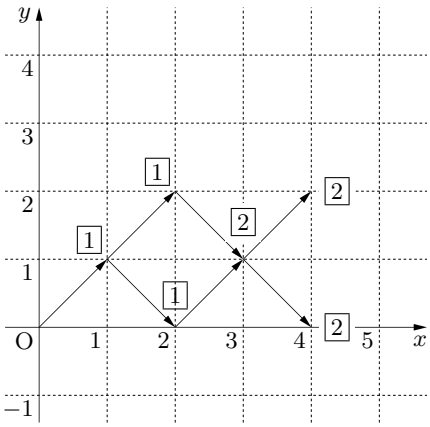
点 $(3,\ -1)$ に至る移動の仕方は　**2** 通りある．　……(答)

(ii) 条件 $y_1 \geqq 0$ かつ $y_2 \geqq 0$ かつ $y_3 \geqq 0$ かつ $y_4 \geqq 0$ を満たす移動の仕方は下左図となるから，このときの確率は

$$\frac{1+3+2}{2^4} = \mathbf{\frac{3}{8}} \quad \text{……(答)}$$

となる．





また，$y_1 \geqq 0$ かつ $y_2 \geqq 0$ かつ $y_3 = 1$ かつ $y_4 \geqq 0$ である移動に仕方は上右図となるから，このときの確率は

$$\frac{2+2}{2^4} = \boldsymbol{\frac{1}{4}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる．さらに，$y_1 \geqq 0$ かつ $y_2 \geqq 0$ かつ $y_3 \geqq 0$ かつ $y_4 \geqq 0$ であったとき，$y_3 = 1$ である条件付き確率は

$$\frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \boldsymbol{\frac{2}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる．

- 最後の条件付き確率は

$$\frac{2+2}{1+3+2} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

としてもよい．

(iii) P の座標が (4, 2) であるのは，表の出る回数を a とおくと

$$1 \times a + (-1) \times (4-a) = 2 \qquad \therefore \quad a = 3$$

すなわち，移動の仕方によらず (表裏の順序によらず)

表の出る回数が **3** 回 で，　　……(答)
裏の出る回数が $4-3=1$ 回

のときである．

(2) さいころを k 回投げ終えた時点での点 Q の座標 $\mathrm{Q}(y_k)$ を $\mathrm{Q}(k,\ y_k)$ で表す．y_k が 1 だけ増加する確率は $\frac{1}{3}$ であり，1 だけ減少する確率は $\frac{2}{3}$ である．

(i) さいころを 7 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 3 であるのは，7 回のうち 3 の倍数の目が出る回数を a とおくと

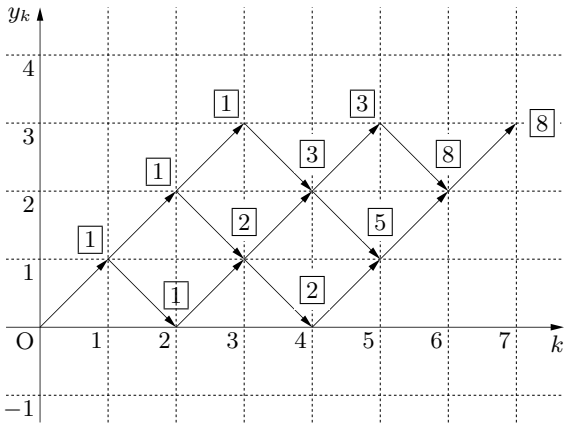
$$1 \times a + (-1) \times (7-a) = 3 \qquad \therefore \quad a = 5$$

であり，確率は

$${}_7\mathrm{C}_5 \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} \times \frac{2^2}{3^7} = \boldsymbol{\frac{28}{729}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる．

(ii) $k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 7$ に対し $0 \leqq y_k \leqq 3$ であり，かつ $y_7 = 3$ である移動の仕方は

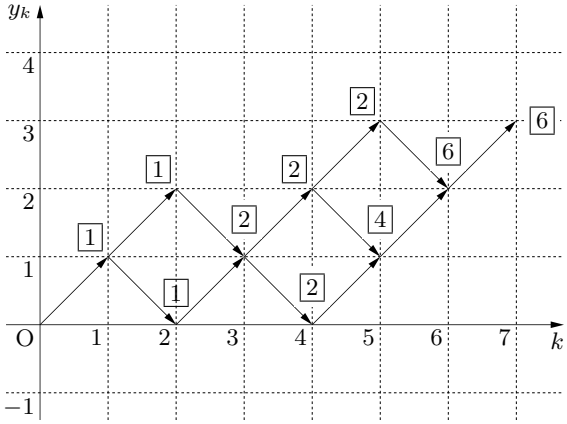


となり 8 通りある．1 だけ増加するのが 5 回，1 だけ減少するのが 2 回であるから，このときの確率は

$$8 \times \left(\frac{1}{3}\right)^5 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{32}{2187}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる．

(iii) $k=1,\ 2,\ \cdots,\ 7$ に対し $0 \leqq y_k \leqq 3$ であり，かつ $y_7=3$ である移動のうちで $y_3=1$ である移動の仕方は



となり 6 通りある．よって，求める条件付き確率は

$$\frac{6}{8}=\boldsymbol{\frac{3}{4}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

となる．

- $k=1,\ 2,\ \cdots,\ 7$ に対し $0 \leqq y_k \leqq 3$ であり，かつ $y_7=3$ であるという事象を A，3 回投げ終えた時点で点 Q の座標が 1 であるという事象を A_3 とおくと，求める条件付き確率は

$$P_{A_3}(A)=\frac{P(A\cap A_3)}{P(A)}=\frac{6\times\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^2}{8\times\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{3}{4}$$

である．