白玉 10 個と赤玉 5 個が袋に入っている．この袋から 1 個ずつ玉を取り出し，その順番で左から右へ 15 個の玉を一列に並べる．このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 列の左から 5 番目の位置にはじめて赤玉が並ぶ確率を求めよ．

(2) 列の左から n 番目の位置に 3 個目の赤玉が並ぶ確率を P_n $(3 \leqq n \leqq 13)$ とする．このとき，P_n が最大となる n とそのときの確率を求めよ．

(3) ちょうど 3 個連続して赤玉が並ぶ確率を求めよ．なお，4 個以上連続して赤玉が並ぶ事象はこの確率に含めないものとする．

(4) ちょうど 3 個連続して赤玉が並んだとき，その 3 個連続した最後の赤玉が列の左から n 番目の位置にある条件付き確率を Q_n $(3 \leqq n \leqq 15)$ とする．このとき，Q_n が最大となる n とそのときの確率を求めよ．

(23 愛知県立大 情報科学 1)

【答】

(1) $\dfrac{10}{143}$

(2) $\dfrac{21}{143}$

(3) $\dfrac{55}{273}$

(4) $n = 3,\ 15$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{11}$

【解答】

袋から 1 個ずつ玉を取り出し，順に左から右へ 15 個の玉を一列に並べるとき，玉は等確率に取り出されるから，15 個の玉はすべて区別する．

(1) 15 個の玉を一列に並べる並べ方は 15! 通りあり，これらは同様に確からしい．

列の左から 5 番目にはじめて赤玉が並ぶのは，1 番目から 4 番目は白玉が並び，5 番目に赤玉が並ぶとき (6 番目以降は残った玉 10 個がどのように並んでもよい) であり，求める確率は

$$\frac{{}_{10}\mathrm{P}_4 \times {}_5\mathrm{C}_1 \times 10!}{15!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \times 5}{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11} = \frac{10}{13 \cdot 11} = \mathbf{\frac{10}{143}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 左から n 番目 $(3 \leqq n \leqq 13)$ に 3 個目の赤玉が並ぶのは，$n-1$ 番目までに赤玉 2 個，白玉 $n-3$ 個が並び，n 番目が赤玉が並ぶとき ($n+1$ 番目以降は残った玉 $15-n$ 個がどのように並んでもよい) であり，確率 P_n は

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{{}_{n-1}\mathrm{C}_2 \cdot {}_5\mathrm{P}_2 \cdot {}_{10}\mathrm{P}_{n-3} \times {}_3\mathrm{C}_1 \times (15-n)!}{15!} \\ &= \frac{1}{15!}\left\{\frac{(n-1)(n-2)}{2} \cdot 5 \cdot 4 \cdot \frac{10!}{(13-n)!} \times 3 \times (15-n)!\right\} \\ &= \frac{(n-1)(n-2)(15-n)(14-n)}{7 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11} \end{aligned}$$

である．$3 \leqq n \leqq 12$ において

$$P_n < P_{n+1} \iff \frac{P_{n+1}}{P_n} > 1$$

であり

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{n(n-1)(14-n)(13-n)}{(n-1)(n-2)(15-n)(14-n)} = \frac{n(13-n)}{(n-2)(15-n)}$$

であるから，$\dfrac{P_{n+1}}{P_n} > 1$ を満たす n の値の範囲は

$$n(13-n) > (n-2)(15-n)$$
$$13n - n^2 > -n^2 + 17n - 30$$
$$\therefore\quad n < \frac{30}{4} = 7.5$$

よって

$3 \leqq n \leqq 7$ のとき　$P_n < P_{n+1}$，
$8 \leqq n \leqq 12$ のとき　$P_n > P_{n+1}$

である．すなわち

$$P_3 < P_4 < \cdots P_7 < P_8,\ P_8 > P_9 > \cdots > P_{13}$$

である．

以上より，P_n は

$$\boldsymbol{n = 8}\ \textbf{のとき，最大値}\ \frac{7\cdot 6\cdot 7\cdot 6}{7\cdot 13\cdot 12\cdot 11} = \frac{7\cdot 3}{13\cdot 11} = \boldsymbol{\frac{21}{143}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

をとる．

(3) 白玉 10 個を先に並べ，その両端と隙間の 11 カ所に赤玉 3 個の組 $\boxed{●●●}$ と，残りの赤玉 2 個をおくとよい．残りの赤玉 2 個は連続して並ぶときと離れて並ぶときがある．

赤玉 3 個の組 $\boxed{●●●}$ は ${}_5\mathrm{P}_3 = 5\cdot 4\cdot 3$ 通りある．

(i) 白玉 10 個を並べた後，$\boxed{●●●}$，$\boxed{●●}$ を隣り合わないように並べる確率は，残りの赤玉 2 個が連続して $\boxed{●●}$ となるのは $2\cdot 1$ 通りあるから

$$\frac{10!\cdot{}_{11}\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_1\cdot 5\cdot 4\cdot 3\times 2\cdot 1}{15!} = \frac{\dfrac{11\cdot 10}{2\cdot 1}\times 2\cdot 5\cdot 4\cdot 3\times 2\cdot 1}{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11} = \frac{10}{3\cdot 7\cdot 13}$$

である．

(ii) 白玉 10 個を並べた後，$\boxed{●●●}$，●，● を隣り合わないように並べる確率は

$$\frac{10!\cdot{}_{11}\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{C}_1\cdot 5\cdot 4\cdot 3\times 2\times 1}{15!} = \frac{\dfrac{11\cdot 10\cdot 9}{3\cdot 2\cdot 1}\times 3\cdot 5\cdot 4\cdot 3\times 2\times 1}{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11} = \frac{15}{7\cdot 13}$$

よって，求める確率は

$$\frac{10}{3\cdot 7\cdot 13} + \frac{3\cdot 15}{3\cdot 7\cdot 13} = \boldsymbol{\frac{55}{273}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(4) ちょうど 3 個連続して赤玉が並ぶという事象を A，3 個連続した最後の赤玉が列の左から n 番目 $(3 \leqq n \leqq 15)$ の位置にあるという事象を $N(n)$ とおくと，求める条件付き確率 Q_n は

$$Q_n = P_A(N(n)) = \frac{P(A\cap N(n))}{P(A)}$$

であり，(3) より

$$P(A) = \frac{55}{273}$$

である．

(ⅰ) $n=3$ のとき

　$N(3)$ が起こるのはちょうど 3 個連続して赤玉が左端に並ぶときであり，4 番目は白玉が並ぶ．残り 11 個はどのように並んでもよいから

$$P(A{\cap}N(3))=\frac{{}_5\mathrm{P}_3\cdot 10\times{}_{11}\mathrm{C}_2\cdot 2!\times 9!}{15!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 10\times 11\cdot 10}{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}=\frac{5}{3\cdot 7\cdot 13}$$

であり

$$Q_3=\frac{5}{3\cdot 7\cdot 13}\cdot\frac{3\cdot 7\cdot 13}{55}=\frac{1}{11}$$

である．

(ⅱ) $4\leqq n\leqq 14$ のとき

　$N(n)$ が起こるのは $n-3$ 番目が白玉，その後 3 個連続して赤玉が並び，$n+1$ 番目に白玉が並ぶときであり，残り 10 個はどのように並んでもよいから

$$\begin{aligned}P(A\cap N(n))&=\frac{10\cdot{}_5\mathrm{P}_3\cdot 9\times{}_{10}\mathrm{C}_2\cdot 2!\times 8!}{15!}=\frac{10\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 9\times 10\cdot 9}{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}\\&=\frac{15}{7\cdot 13\cdot 11}\end{aligned}$$

であり

$$Q_n=\frac{15}{7\cdot 13\cdot 11}\cdot\frac{3\cdot 7\cdot 13}{55}=\frac{3\cdot 3}{11\cdot 11}=\frac{9}{121}$$

である．

(ⅲ) $n=15$ のとき

　$N(15)$ が起こるのはちょうど 3 個連続して赤玉が右端に並ぶときであり，12 番目は白玉が並ぶ．残り 11 個はどのように並んでもよいから

$$P(A{\cap}N(15))=\frac{10\cdot{}_5\mathrm{P}_3\times{}_{11}\mathrm{C}_2\cdot 2!\times 9!}{15!}=\frac{10\cdot 5\cdot 4\cdot 3\times 11\cdot 10}{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}=\frac{5}{3\cdot 7\cdot 13}$$

であり

$$Q_{15}=\frac{5}{3\cdot 7\cdot 13}\cdot\frac{3\cdot 7\cdot 13}{55}=\frac{1}{11}$$

である．

　以上，(ⅰ)(ⅱ)(ⅲ) より，Q_n は

　　　　$\boldsymbol{n=3,\ 15}$ **のとき，最大値** $\boldsymbol{\dfrac{1}{11}}$ ……(答)

をとる．