確率 p でシュートを成功させる選手がいる．ある試合中に，この選手は 3 回のシュートを試みた．

(1) この選手が 3 回目で初めてシュートを成功させた確率を，p を用いて表せ．

この選手の親は試合を観戦できなかったが,「3 回のシュートのうち少なくとも 1 回のシュートを成功させた］という事象 A が起こったことを知った．この事象 A が起こったときに，この選手が 3 回目で初めてシュートを成功させる条件付き確率は $\dfrac{25}{109}$ であるという．

(2) p の値を求めよ．
(3) 事象 A が起こったときに，この選手が 2 回目で初めてシュートを成功させる条件付き確率を求めよ．

(23 札幌医大 3)

【答】
(1) $(1-p)^2p$
(2) $p=\dfrac{2}{7}$
(3) $\dfrac{35}{109}$

【解答】

(1) 3 回目で初めてシュートを成功するのは,「失敗，失敗，成功」のときである．シュートを成功させる確率は p であるから，求める確率は

$$\boldsymbol{(1-p)^2p} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) 「3 回のシュートのうち少なくとも 1 回のシュートを成功させた］という事象が A である．「3 回目で初めてシュートを成功させる」という事象を H_3 とおくと，与えられた条件は

$$P_A(H_3)=\frac{25}{109}$$

である．ここで

$$\begin{aligned}P_A(H_3)&=\frac{P(A\cap H_3)}{P(A)}=\frac{P(H_3)}{1-P(\overline{A})}\\&=\frac{(1-p)^2p}{1-(1-p)^3}=\frac{(1-p)^2p}{3p-3p^2+p^3}\\&=\frac{(1-p)^2}{3-3p+p^2}\end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned}&\frac{(1-p)^2}{3-3p+p^2}=\frac{25}{109}\\&109(1-2p+p^2)=25(3-3p+p^2)\\&84p^2-143p+34=0\\&(7p-2)(12p-17)=0\end{aligned}$$

$0 \leqq p \leqq 1$ より

$$\boldsymbol{p = \frac{2}{7}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) 「2 回目で初めてシュートを成功させる」という事象を H_2 とおくと，求める確率は

$$\begin{aligned} P_A(H_2) &= \frac{P(A \cap H_2)}{P(A)} = \frac{P(H_2)}{1 - P(\overline{A})} = \frac{(1-p) \cdot p \cdot 1}{3p - 3p^2 + p^3} \\ &= \frac{1-p}{3 - 3p + p^2} = \frac{(1-p)^2}{3 - 3p + p^2} \cdot \frac{1}{1-p} \\ &= \frac{25}{109} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{7}} \\ &= \boldsymbol{\frac{35}{109}} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

である．