次の文章を読み，(1)〜(3) に答えよ．

さいころが 2 つ，硬貨が 2 枚ある．それぞれを同時に投下する試行を繰り返し，次の規則に従って座標平面上の点 P が動く．ただし，点 P ははじめ原点 O(0, 0) にある．

- さいころの出た目の和が偶数のとき，点 P は x 軸方向に 1 だけ進む．
- さいころの出た目の和が奇数のとき，点 P は y 軸方向に 1 だけ進む．
- 硬貨が 2 枚とも表のとき，点 P は x 軸方向に 1 だけ進む．
- 硬貨が 2 枚とも裏のとき，点 P は y 軸方向に 1 だけ進む．
- 硬貨が表と裏 1 枚ずつのとき，点 P は動かない．

（例）さいころの出た目の和が偶数で硬貨が表と裏 1 枚ずつの場合，点 P は x 軸方向に 1 だけ進む．

このとき，以下の問いに答えよ．

(1) 試行を 2 回繰り返したとき，点 P が点 (2, 2) にある確率を求めよ．
(2) 試行を 4 回繰り返したとき，$\mathrm{OP}=5$ となる確率を求めよ．
(3) 試行を 4 回繰り返したとき，点 P が $y=x-1$ の直線上にある確率を求めよ．

(23 三重大 後 生資 1)

【答】

(1) $\dfrac{3}{32}$

(2) $\dfrac{39}{256}$

(3) $\dfrac{75}{512}$

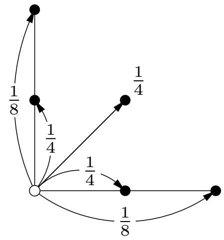
【解答】

- さいころ 2 個の出た目の和が偶数となるのは，目の出方が (偶数，偶数) または (奇数，奇数) のときであり，この確率は $\dfrac{3^2+3^2}{6^2}=\dfrac{1}{2}$ である．このとき点 P は x 軸方向に 1 だけ進む．これを (1, 0) と表す．
- さいころ 2 個の出た目の和が奇数となるのは，目の出方が (偶数，奇数) または (奇数，偶数) のときであり，この確率は $\dfrac{3^2+3^2}{6^2}=\dfrac{1}{2}$ である．このときの点 P の移動量は (0, 1) である．
- 硬貨 2 枚がともに表となる確率は $\dfrac{1^2}{2^2}=\dfrac{1}{4}$ であり，このときの点 P の移動量は (1, 0) である．
- 硬貨 2 枚がともに裏となる確率は $\dfrac{1^2}{2^2}=\dfrac{1}{4}$ であり，このときの点 P の移動量は (0, 1) である．
- 硬貨 2 枚が表と裏 1 枚ずつとなるのは，(表，裏) または (裏，表) のときであり，この確率は $\dfrac{1^2+1^2}{2^2}=\dfrac{1}{2}$ である．このときの点 P の移動量は (0, 0) である．

したがって，1 回の試行による点 P の移動量は

$$(2,\ 0),\ (1,\ 1),\ (1,\ 0),\ (0,\ 2),\ (0,\ 1)$$

のいずれかであり，それぞれが起こる確率は



- 移動量 $(2,\ 0)$: $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$
- 移動量 $(1,\ 1)$: $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{4}$
- 移動量 $(1,\ 0)$: $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$
- 移動量 $(0,\ 2)$: $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$
- 移動量 $(0,\ 1)$: $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

である．

(1) 試行を 2 回繰り返したとき，点 P が点 $(2,\ 2)$ にあるのは，2 回の移動量が

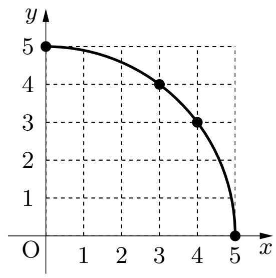
「$(2,\ 0), (0,\ 2)$」 または 「$(1,\ 1), (1,\ 1)$」

のときであり，移動の順序も考えると，求める確率は

$$2\times\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{8}+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{2^5}+\frac{1}{2^4}=\frac{1+2}{2^5}=\boldsymbol{\frac{3}{32}}$$ ……(答)

である．

(2) 試行を 4 回繰り返したとき，$\mathrm{OP}=5$ となるのは，点 P が点 $(5,\ 0)$，$(0,\ 5)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 3)$ のいずれかあるときであり，それぞれの 4 回の移動量は

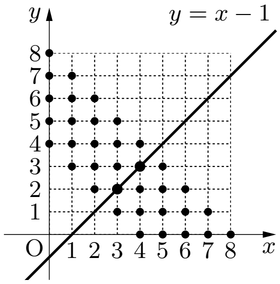


- 点 $(5,\ 0)$: 「$(2,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 0)$」
- 点 $(0,\ 5)$: 「$(0,\ 2)$，$(0,\ 1)$，$(0,\ 1)$，$(0,\ 1)$」
- 点 $(3,\ 4)$: 「$(2,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(0,\ 2)$」
  または 「$(2,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(0,\ 1)$，$(0,\ 2)$」
  または 「$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(1,\ 1)$，$(0,\ 2)$」
  または 「$(1,\ 1)$，$(1,\ 1)$，$(1,\ 1)$，$(0,\ 1)$」
- 点 $(4,\ 3)$: 「$(2,\ 0)$，$(2,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(0,\ 2)$」
  または 「$(2,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(0,\ 2)$」
  または 「$(2,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(1,\ 1)$，$(0,\ 1)$」
  または 「$(1,\ 1)$，$(1,\ 1)$，$(1,\ 1)$，$(1,\ 0)$」

である．移動の順序も考えると，求める確率は

$$\begin{aligned}
&4\times\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^3+4\times\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^3\\
&\quad+\left\{\frac{4!}{1!1!2!}\times\frac{1}{8}\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}\right)^2+4!\times\frac{1}{8}\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{8}+\frac{4!}{1!2!1!}\times\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{1}{8}+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^3\frac{1}{4}\right\}\\
&\quad+\left\{\frac{4!}{2!1!1!}\times\left(\frac{1}{8}\right)^2\frac{1}{4}\frac{1}{8}+4!\times\frac{1}{8}\frac{1}{4}\frac{1}{4}\frac{1}{8}+\frac{4!}{1!2!1!}\times\frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\right)^2\frac{1}{4}+4\times\left(\frac{1}{4}\right)^3\frac{1}{4}\right\}\\
&=\frac{1}{2^7}+\frac{1}{2^7}+\left(\frac{3}{2^9}+\frac{3}{2^7}+\frac{3}{2^7}+\frac{1}{2^6}\right)+\left(\frac{3}{2^9}+\frac{3}{2^7}+\frac{3}{2^7}+\frac{1}{2^6}\right)\\
&=\frac{4+4+(3+12+12+8)+(3+12+12+8)}{2^9}\\
&=\frac{2\cdot(4+35)}{2^9}\\
&=\boldsymbol{\frac{39}{256}}
\end{aligned}$$ ……(答)

である．



(3) 試行を 4 回繰り返したとき，点 P は右図の黒丸のいずれかにあり，点 P が $y = x - 1$ の直線上にあるのは，点 (4, 3), (3, 2) のいずれかにあるときである．それぞれの 4 回の移動量は

○ 点 (4, 3)： (2) で考察済み．
○ 点 (3, 2)： 「(2, 0)，(1, 0)，(0, 1)，(0, 1)」
　　　　または　「(1, 0)，(1, 0)，(1, 0)，(0, 2)」
　　　　または　「(1, 0)，(1, 0)，(1, 1)，(0, 1)」

である．移動の順序も考えると，求める確率は

$$\begin{aligned}
&\frac{35}{2^9} + \left\{ \frac{4!}{1!1!2!} \times \frac{1}{8} \left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{4} + 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 \frac{1}{8} + \frac{4!}{2!1!1!} \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \frac{1}{4} \frac{1}{4} \right\} \\
&= \frac{35}{2^9} + \left(\frac{3}{2^7} + \frac{1}{2^7} + \frac{3}{2^6} \right) \\
&= \frac{35 + 40}{2^9} \\
&= \mathbf{\frac{75}{512}}
\end{aligned}$$

……(答)

である．