1 個のさいころを投げて出た目によって得点を得るゲームを考える．出た目が 1，2 であれば得点は 2，出た目が 3 であれば得点は 1，出た目が 4，5，6 であれば得点は 0 とする．このゲームを k 回繰り返すとき，得点の合計を S_k とする．

(1) $S_2 = 3$ となる確率を求めよ．
(2) S_3 が奇数となる確率を求めよ．
(3) $S_4 \geqq n$ となる確率が $\dfrac{1}{9}$ 以下となる最小の整数 n を求めよ．

(23 千葉大 2)

【答】

(1) $\dfrac{1}{9}$
(2) $\dfrac{19}{54}$
(3) $n = 7$

【解答】

1 個のさいころを投げて得点が 2，1，0 となる確率はそれぞれ $\dfrac{2}{6}$，$\dfrac{1}{6}$，$\dfrac{3}{6}$ である．

(1) $S_2 = 3$ となるのは，得点が

$$(1\text{ 回目},\ 2\text{ 回目}) = (2,\ 1)\ \text{または}\ (1,\ 2)$$

のときであり，これらは排反である．この確率は

$$\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{6}=\boldsymbol{\frac{1}{9}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $0 \leqq S_3 \leqq 6$ であるから，S_3 が奇数となるのは

$$S_3 = 1,\ 3,\ 5$$

のいずれかであり，得点の順序を無視すると

$S_3 = 1$ となるのは　$\{1,\ 0,\ 0\}$
$S_3 = 3$ となるのは　$\{2,\ 1,\ 0\}$，$\{1,\ 1,\ 1\}$，
$S_3 = 5$ となるのは　$\{2,\ 2,\ 1\}$

のいずれかである．得点の順序も考慮すると，求める確率は

$$\begin{aligned}&{}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{3}{6}\right)^2+\left\{3!\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^3\right\}+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}\\&=\frac{27+(36+1)+12}{6^3}=\frac{76}{6^3}=\boldsymbol{\frac{19}{54}}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

- 得点の偶奇に着目すると，さいころを 1 回投げて得点が偶数となる確率は $\dfrac{5}{6}$，奇数となる確率は $\dfrac{1}{6}$ である．

  S_3 が奇数となるのは，得点の順序を無視すると｛奇，奇，奇｝，｛奇，偶，偶｝いずれかであり．これらは排反である．求める確率は

  $$\left(\frac{1}{6}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2=\frac{1+75}{6^3}=\frac{19}{54}$$

  である．

(3) $S_4 \geqq n$ となる確率を $P(S_4 \geqq n)$ とおく．

$$P(S_4 \geqq n) - P(S_4 \geqq n+1) = P(S_4 = n) \geqq 0$$
$$\therefore \quad P(S_4 \geqq n) \geqq P(S_4 \geqq n+1)$$

であり，$P(S_4 \geqq n)$ は n について単調減少である．　　　$\cdots\cdots (*)$

$n \geqq 9$ のとき

$$P(S_4 \geqq 9) = 0 \left(< \frac{1}{9} \right) \quad (\because\ 0 \leqq S_4 \leqq 8)$$

$n = 8$ のとき

$$\begin{aligned} P(S_4 \geqq 8) &= P(S_4 = 8) + P(S_4 \geqq 9) \\ &= \left(\frac{2}{6}\right)^4 + 0 \quad (\because\ S_4 = 8 \text{ となるのは } \{2,\ 2,\ 2,\ 2\}) \\ &= \frac{1}{81} \left(< \frac{1}{9} \right) \end{aligned}$$

$n = 7$ のとき

$$\begin{aligned} P(S_4 \geqq 7) &= P(S_4 = 7) + P(S_4 \geqq 8) \\ &= {}_4\mathrm{C}_3 \left(\frac{2}{6}\right)^3 \frac{1}{6} + \frac{1}{81} \quad (\because\ S_4 = 7 \text{ となるのは } \{2,\ 2,\ 2,\ 1\}) \\ &= \frac{4 \cdot 8}{6^4} + \frac{1}{81} = \frac{2+1}{81} = \frac{1}{27} \left(< \frac{1}{9} \right) \end{aligned}$$

$n = 6$ のとき

$$\begin{aligned} P(S_4 \geqq 6) &= P(S_4 = 6) + P(S_4 \geqq 7) \\ &= \left\{ {}_4\mathrm{C}_3 \left(\frac{2}{6}\right)^3 \frac{3}{6} + {}_4\mathrm{C}_2 \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \right\} + \frac{1}{27} \\ &\qquad (\because\ S_4 = 6 \text{ となるのは } \{2,\ 2,\ 2,\ 0\},\ \{2,\ 2,\ 1,\ 1\}) \\ &= \left(\frac{4 \cdot 8 \cdot 3}{6^4} + \frac{6 \cdot 4}{6^4} \right) + \frac{1}{27} = \frac{(4+1)+2}{54} = \frac{7}{54} \left(> \frac{1}{9} = \frac{6}{54} \right) \end{aligned}$$

$P(S_4 \geqq 6) > \dfrac{1}{9}$ であるから，$(*)$ もあわせると，$P(S_4 \geqq 6) \leqq \dfrac{1}{9}$ となる最小の整数 n は

　$\boldsymbol{n = 7}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　$\cdots\cdots$(答)

である．

- $P(S_4 \geqq 0) = 1$，$P(S_4 \geqq 9) = 0$ であることはすぐにわかる．$P(S_4 \geqq n) \leqq \dfrac{1}{9}$ となる最小の整数 n を求めるのだから，$n = 1,\ 2,\ \cdots$ として $P(S_4 \geqq n)$ を順次求め，$P(S_4 \geqq n) \leqq \dfrac{1}{9}$ を満たす最初の n をみつければよい．しかし，$\dfrac{1}{9}$ は 0 に近い値であり $n = 9$ の方に近いのではないかと予想されるから，【解答】では $n = 9,\ 8,\ \cdots$ と代入した．ただし $(*)$ を言及しておかなければいけない．

　ちなみに，$S_4 = n$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$ のときの得点の取り方は

　$n = 0$ のとき　$\{0,\ 0,\ 0,\ 0\}$
　$n = 1$ のとき　$\{1,\ 0,\ 0,\ 0\}$
　$n = 2$ のとき　$\{2,\ 0,\ 0,\ 0\}$, $\{1,\ 1,\ 0,\ 0\}$
　$n = 3$ のとき　$\{2,\ 1,\ 0,\ 0\}$, $\{1,\ 1,\ 1,\ 0\}$
　$n = 4$ のとき　$\{2,\ 2,\ 0,\ 0\}$, $\{2,\ 1,\ 1,\ 0\}$, $\{1,\ 1,\ 1,\ 1\}$
　$n = 5$ のとき　$\{2,\ 2,\ 1,\ 0\}$, $\{2,\ 1,\ 1,\ 1\}$
　$n = 6$ のとき　$\{2,\ 2,\ 2,\ 0\}$, $\{2,\ 2,\ 1,\ 1\}$
　$n = 7$ のとき　$\{2,\ 2,\ 2,\ 1\}$
　$n = 8$ のとき　$\{2,\ 2,\ 2,\ 2\}$

であり

$$P(S_4=0)=\left(\frac{3}{6}\right)^4=\frac{1}{2^4}$$
$$P(S_4=1)={}_4\mathrm{C}_1\frac{1}{6}\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{4}{6\cdot 2^3}=\frac{1}{2^2\cdot 3}$$
$$\begin{aligned}P(S_4=2)&={}_4\mathrm{C}_1\frac{2}{6}\left(\frac{3}{6}\right)^3+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2\\&=\frac{4}{3\cdot 2^3}+\frac{6}{6^2\cdot 2^2}=\frac{4+1}{2^3\cdot 3}=\frac{5}{2^3\cdot 3}\end{aligned}$$
$$P(S_4=3)=\frac{4!}{1!1!2!}\frac{2}{6}\frac{1}{6}\left(\frac{3}{6}\right)^2+{}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{6}\right)^3\frac{3}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{6^2\cdot 3}=\frac{19}{2^2\cdot 3^3}$$
$$\begin{aligned}P(S_4=4)&={}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{3}{6}\right)^2+\frac{4!}{1!2!1!}\frac{2}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{3}{6}+\left(\frac{1}{6}\right)^4\\&=\frac{216+72+1}{6^4}=\frac{289}{2^4\cdot 3^4}\end{aligned}$$
$$P(S_4=5)=\frac{4!}{2!1!1!}\left(\frac{2}{6}\right)^2\frac{1}{6}\frac{3}{6}+{}_4\mathrm{C}_1\frac{2}{6}\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2\cdot 3^4}=\frac{19}{2\cdot 3^4}$$
$$P(S_4=6)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{6}\right)^3\frac{3}{6}+{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{2}{6}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{2}{3^3}+\frac{1}{3^2\cdot 6}=\frac{5}{2\cdot 3^3}$$
$$P(S_4=7)={}_4\mathrm{C}_3\left(\frac{2}{6}\right)^3\frac{1}{6}=\frac{4}{3^3\cdot 6}=\frac{2}{3^4}$$
$$P(S_4=8)=\left(\frac{2}{6}\right)^4=\frac{1}{3^4}$$

であるから

$$P(S_4\geqq 0)=1$$
$$P(S_4\geqq 1)=P(S_4\geqq 0)-P(S_4=0)=1-\frac{1}{2^4}=\frac{15}{2^4}\left(>\frac{1}{9}\right)$$
$$\begin{aligned}P(S_4\geqq 2)&=P(S_4\geqq 1)-P(S_4=1)\\&=\frac{15}{2^4}-\frac{1}{2^2\cdot 3}=\frac{45-4}{2^4\cdot 3}=\frac{41}{48}\left(>\frac{1}{9}\right)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}P(S_4\geqq 3)&=P(S_2\geqq 2)-P(S_4=2)\\&=\frac{41}{2^4\cdot 3}-\frac{5}{2^3\cdot 3}=\frac{41-10}{2^4\cdot 3}=\frac{31}{2^4\cdot 3}\left(>\frac{1}{9}\right)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}P(S_4\geqq 4)&=P(S_3\geqq 3)-P(S_4=3)\\&=\frac{31}{2^4\cdot 3}-\frac{19}{2^2\cdot 3^3}=\frac{279-76}{2^4\cdot 3^3}=\frac{203}{432}\left(>\frac{1}{9}\right)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}P(S_4\geqq 5)&=P(S_4\geqq 4)-P(S_4=4)\\&=\frac{203}{2^4\cdot 3^3}-\frac{289}{2^4\cdot 3^4}=\frac{609-289}{2^4\cdot 3^4}=\frac{320}{2^4\cdot 3^4}=\frac{20}{3^4}\left(>\frac{1}{9}\right)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}P(S_4\geqq 6)&=P(S_4\geqq 5)-P(S_4=5)\\&=\frac{20}{3^4}-\frac{19}{2\cdot 3^4}=\frac{40-19}{2\cdot 3^4}=\frac{21}{2\cdot 3^4}=\frac{7}{2\cdot 3^3}=\frac{7}{54}\left(>\frac{1}{9}=\frac{6}{54}\right)\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}P(S_4\geqq 7)&=P(S_4\geqq 6)-P(S_4=6)\\&=\frac{7}{2\cdot 3^3}-\frac{5}{2\cdot 3^3}=\frac{1}{3^3}=\frac{1}{27}\left(<\frac{1}{9}=\frac{3}{27}\right)\end{aligned}$$

であり，$P(S_4\geqq 6)\leqq\dfrac{1}{9}$ となる最小の整数 n は

$$n=7$$

である (やはり計算量増えますね).