n を 2 以上の整数とする．袋の中に 12 個の玉が入っており，このうち n 個が赤玉で残りは白玉である．この袋から 2 個の玉を同時に取り出し，色を調べてから袋に戻す試行を T とするとき，以下の問いに答えなさい．

(1) 試行 T を 1 回だけ行う．次の設問に答えなさい．

(i) $n=4$ のとき，取り出した玉が赤玉と白玉 1 個ずつである確率を求めなさい．

(ii) 取り出した玉が 2 個とも同じ色である確率を n を用いて表しなさい．

(2) 試行 T を 1 回だけ行う．取り出した玉が赤玉 2 個である確率が，赤玉と白玉 1 個ずつである確率より小さいとき，次の設問に答えなさい．

(i) n の値の範囲を求めなさい．

(ii) 取り出した玉が 2 個とも同じ色である確率の最小値とそのときの n の値，最大値とそのときの n の値をそれぞれ求めなさい．

(3) 試行 T を m 回繰り返す ($m \geqq 2$)．$n=4$ のとき，m 回のうち k 回以上，取り出した玉が 2 個とも同じ色である確率を P_k とする ($0 \leqq k \leqq m$)．$P_{m-1} \leqq 7P_m$ となる m の値の範囲を求めなさい．

(23 岩手県大 中期 ソフト情 1)

【答】

(1) (i) $\dfrac{16}{33}$　(ii) $\dfrac{n^2-12n+66}{66}$

(2) (i) $2 \leqq n \leqq 8$　(ii) 最小値は $\dfrac{5}{11}$ $(n=6)$，最大値は $\dfrac{23}{33}$ $(n=2)$

(3) $2 \leqq m \leqq 6$

【解答】

(1) 12 個の玉が入った袋から 2 個の玉を同時に取り出すときの玉の取り出し方は

$$ {}_{12}\mathrm{C}_2 = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 66 \text{ (通り)} $$

あり，これらは同様に確からしい．

(i) $n=4$ のとき，袋の中に赤玉 4 個，白玉 8 個が入っている．取り出した玉が赤玉と白玉 1 個ずつであるのは

$$ {}_4\mathrm{C}_1 \cdot {}_8\mathrm{C}_1 = 4 \cdot 8 \text{ (通り)} $$

あるから，求める確率は

$$ \frac{4 \cdot 8}{66} = \boldsymbol{\frac{16}{33}} \qquad \cdots\cdots\text{(答)} $$

である．

(ii) 取り出した玉が 2 個とも同じ色であるのは

- n $(2 \leqq n \leqq 12)$ 個の赤玉の中から 2 個の赤玉を取り出す
- $12-n$ $(2 \leqq n \leqq 12)$ 個の白玉の中から 2 個の白玉を取り出す

の 2 通りがある．これらは排反であるから

$$ \begin{aligned} {}_n\mathrm{C}_2 + {}_{12-n}\mathrm{C}_2 &= \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} + \frac{(12-n)(11-n)}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{(n^2-n)+(n^2-23n+132)}{2} \\ &= n^2-12n+66 \text{ (通り)} \end{aligned} $$

あるから，求める確率は

$$ \boldsymbol{\frac{n^2-12n+66}{66}} \qquad \cdots\cdots\text{(答)} $$

である．

(2) (i) 取り出した玉が赤玉 2 個である確率は

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_2}{66} = \frac{n(n-1)}{2\cdot 66}$$

であり，取り出した玉が赤玉と白玉 1 個ずつである確率は

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_1 \cdot {}_{12-n}\mathrm{C}_1}{66} = \frac{n\cdot(12-n)}{66}$$

であるから，条件を満たす n の値の範囲は

$$\begin{aligned}
&\frac{n(n-1)}{2\cdot 66} < \frac{n\cdot(12-n)}{66} \\
&n(n-1) < 2n(12-n) \\
&3n^2 - 25n < 0 \\
\therefore\quad &0 < n < \frac{25}{3}
\end{aligned}$$

である．n は 2 以上の整数であるから

$$\boldsymbol{2 \leqq n \leqq 8} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(ii) 取り出した玉が 2 個とも同じ色である確率は (1)(ii) で求めてあり

$$\frac{n^2-12n+66}{66} = \frac{1}{66}\left\{(n-6)^2+30\right\}$$

である．n は $2 \leqq n \leqq 8$ を満たす整数であるから

$$\boldsymbol{n=6}\ \textbf{のとき，最小値}\ \frac{30}{66} = \boldsymbol{\frac{5}{11}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

であり

$$\boldsymbol{n=2}\ \textbf{のとき，最大値}\ \frac{16+30}{66} = \boldsymbol{\frac{23}{33}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $n=4$ のとき，(1) より 1 回の試行 T で

取り出した玉が赤玉と白玉 1 個ずつである確率は $\dfrac{16}{33}$

取り出した玉が 2 個とも同じ色である確率は $\dfrac{17}{33}$

である．

m $(m \geqq 2)$ 回の試行 T うち k $(0 \leqq k \leqq m)$ 回以上，取り出した玉が 2 個とも同じ色である確率 P_k は

$$P_k = \sum_{i=k}^{m} {}_m\mathrm{C}_i \left(\frac{17}{33}\right)^i \left(\frac{16}{33}\right)^{m-i}$$

であるから

$$\begin{aligned}
&P_{m-1} \leqq 7P_m \\
&{}_m\mathrm{C}_{m-1}\left(\frac{17}{33}\right)^{m-1}\left(\frac{16}{33}\right)^1 + {}_m\mathrm{C}_m\left(\frac{17}{33}\right)^m\left(\frac{16}{33}\right)^0 \leqq 7{}_m\mathrm{C}_m\left(\frac{17}{33}\right)^m\left(\frac{16}{33}\right)^0 \\
&m\left(\frac{17}{33}\right)^{m-1}\left(\frac{16}{33}\right) \leqq 6\left(\frac{17}{33}\right)^m \\
&16m \leqq 6\cdot 17 \\
\therefore\quad &m \leqq \frac{6\cdot 17}{16} = \frac{51}{8}
\end{aligned}$$

m は $m \geqq 3$ を満たす整数であるから

$$\boldsymbol{2 \leqq m \leqq 6} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．