1 個のさいころを 6 の目が出るまで投げ続ける．$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して p_k を $k+1$ 回目に 2 回目の 6 の目が出る確率とするとき，次の問い答えよ．

(1) p_k を求めよ．

(2) p_k を最大にする k の値を求めよ．

(3) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k$ を求めよ．

(23 琉球大 工・医・理・教育 4)

【答】

(1) $p_k = k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^2$

(2) $k = 5,\ 6$

(3) $S_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n - \frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n$

【解答】

(1) p_k は $k+1$ 回目に 2 回目の 6 の目が出る確率，すなわち，k 回目までに 6 の目が 1 回，それ以外の目が $k-1$ 回出た後，$k+1$ 回目に 6 が出る確率だから

$$p_k = {}_k\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{6}\right) = \boldsymbol{k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(2) $\{p_k\}$ の増減を調べる．

$$p_k \lesseqqgtr p_{k+1} \iff \frac{p_{k+1}}{p_k} \gtreqqless 1$$

である．(1) の結果より

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{(k+1)\left(\frac{5}{6}\right)^k\left(\frac{1}{6}\right)^2}{k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{5(k+1)}{6k}$$

であり，$\frac{5(k+1)}{6k} \gtreqqless 1$ となるのは，$5k+5 \gtreqqless 6k$ となるとき，すなわち

$k < 5$ のとき $p_k < p_{k+1}$，
$k = 5$ のとき $p_5 = p_6$，
$k > 5$ のとき $p_k > p_{k+1}$

であり

$$p_1 < p_2 < \cdots < p_5 = p_6,\ p_6 > p_7 > p_8 > \cdots$$

であるから，p_k を最大にする k の値は

$$\boldsymbol{k = 5,\ 6} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．

(3) $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} p_k = \sum\limits_{k=1}^{n} k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{6}\right)^2$ より

$$S_n = \left(\frac{1}{6}\right)^2\left\{1 + 2\left(\frac{5}{6}\right) + 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cdots + n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

$$\frac{5}{6}S_n = \left(\frac{1}{6}\right)^2\left\{\qquad 1\left(\frac{5}{6}\right) + 2\left(\frac{5}{6}\right)^2 + \cdots + (n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + n\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}$$

辺々引くと

$$\frac{1}{6}S_n = \left(\frac{1}{6}\right)^2\left\{1+\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-n\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}$$

$$\therefore\quad S_n = \frac{1}{6}\times\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}}-\frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$= \boldsymbol{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．