以下の問題を解答するにあたっては，必要に応じて 4 ページの正規分布表を用いてもよい．

(1) ある生産地で生産されるピーマン全体を母集団とし，この母集団におけるピーマン 1 個の重さ（単位は g）を表す確率変数を X とする．m と σ を正の実数とし，X は正規分布 $N(m, \sigma^2)$ に従うとする．

(i) この母集団から 1 個のピーマンを無作為に抽出したとき，重さが m g 以上である確率 $P(X \geqq m)$ は

$$P(X \geqq m) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \geqq \boxed{\text{ア}}\right) = \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}}$$

である．

(ii) 母集団から無作為に抽出された大きさ n の標本 X_1，X_2，$\cdots$，X_n の標本平均を $\overline{X}$ とする．$\overline{X}$ の平均（期待値）と標準偏差はそれぞれ

$$E(\overline{X}) = \boxed{\text{エ}}, \quad \sigma(\overline{X}) = \boxed{\text{オ}}$$

となる．

$n = 400$，標本平均が 30.0 g，標本の標準偏差が 3.6 g のとき，m の信頼度 90% の信頼区間を次の**方針**で求めよう．

方針

Z を標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う確率変数として，$P(-z_0 \leqq Z \leqq z_0) = 0.901$ となる z_0 を正規分布表から求める．この z_0 を用いると m の信頼度 90.1% の信頼区間が求められるが，これを信頼度 90% の信頼区間とみなして考える．

方針において，$z_0 = \boxed{\text{カ}}.\boxed{\text{キク}}$ である．

一般に標本の大きさ n が大きいときには，母標準偏差の代わりに標本の標準偏差を用いてよいことが知られている．$n = 400$ は十分に大きいので，**方針**に基づくと，m の信頼度 90% の信頼区間は $\boxed{\text{ケ}}$ となる．

$\boxed{\text{エ}}$，$\boxed{\text{オ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい．）

⓪ σ	① σ^2	② $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$	③ $\dfrac{\sigma^2}{n}$
④ m	⑤ $2m$	⑥ m^2	⑦ $\sqrt{m}$
⑧ $\dfrac{\sigma}{n}$	⑨ $n\sigma$	⑩ nm	⑪ $\dfrac{m}{n}$

$\boxed{\text{ケ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ．

⓪ $28.6 \leqq m \leqq 31.4$	① $28.7 \leqq m \leqq 31.3$	② $28.9 \leqq m \leqq 31.1$
③ $29.6 \leqq m \leqq 30.4$	④ $29.7 \leqq m \leqq 30.3$	⑤ $29.9 \leqq m \leqq 30.1$

(2) (1) の確率変数 X において，$m = 30.0,\ \sigma = 3.6$ とした母集団から無作為にピーマンを 1 個ずつ抽出し，ピーマン 2 個を 1 組にしたものを袋に入れていく．

このようにしてピーマン 2 個を 1 組にしたものを 25 袋作る．その際，1 袋ずつの重さの分散を小さくするために次の**ピーマン分類法**を考える．

ピーマン分類法

無作為に抽出したいくつかのピーマンについて，重さが 30.0 g 以下のときを S サイズ，30.0 g を超えるときは L サイズと分類する．そして，分類されたピーマンから S サイズと L サイズのピーマンを一つずつ選び，ピーマン 2 個を 1 組とした袋を作る．

(i) ピーマンを無作為に 50 個抽出したとき，**ピーマン分類法**で 25 袋作ることができる確率 p_0 を考えよう．無作為に 1 個抽出したピーマンが S サイズである確率は $\dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}$ である．ピーマンを無作為に 50 個抽出したときの S サイズのピーマンの個数を表す確率変数を U_0 とすると，U_0 は二項分布 $B\left(50, \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)$ に従うので

$$p_0 = {}_{50}\mathrm{C}_{\boxed{\text{シス}}} \times \left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)^{\boxed{\text{シス}}} \times \left(1 - \frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)^{50-\boxed{\text{シス}}}$$

となる．

p_0 を計算すると，$p_0 = 0.1122\cdots$ となることから，ピーマンを無作為に 50 個抽出したとき，25 袋作ることができる確率は 0.11 程度とわかる．

(ii) **ピーマン分類法**で 25 袋作ることができる確率が 0.95 以上となるようなピーマンの個数を考えよう．

k を自然数とし，ピーマンを無作為に $(50+k)$ 個抽出したとき，S サイズのピーマンの個数を表す確率変数を U_k とすると，U_k は二項分布 $B\left(50+k, \dfrac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)$ に従う．

$(50+k)$ は十分に大きいので，U_k は近似的に正規分布 $N\left(\boxed{\text{セ}}, \boxed{\text{ソ}}\right)$ に従い，$Y = \dfrac{U_k - \boxed{\text{セ}}}{\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}$ とすると，Y は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

よって，**ピーマン分類法**で，25 袋作ることができる確率を p_k とすると

$$p_k = P(25 \leqq U_k \leqq 25+k) = P\left(-\frac{\boxed{\text{タ}}}{\sqrt{50+k}} \leqq Y \leqq \frac{\boxed{\text{タ}}}{\sqrt{50+k}}\right)$$

となる．

$\boxed{\text{タ}} = \alpha$, $\sqrt{50+k} = \beta$ とおく．

$p_k \geqq 0.95$ になるような $\dfrac{\alpha}{\beta}$ について，正規分布表から $\dfrac{\alpha}{\beta} \geqq 1.96$ を満たせばよいことがわかる．ここでは

$$\frac{\alpha}{\beta} \geqq 2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

を満たす自然数 k を考えることとする．①の両辺は正であるから，$\alpha^2 \geqq 4\beta^2$ を満たす最小の k を k_0 とすると，$k_0 = \boxed{\text{チツ}}$ であることがわかる．ただし，$\boxed{\text{チツ}}$ の計算においては，$\sqrt{51} = 7.14$ を用いてもよい．

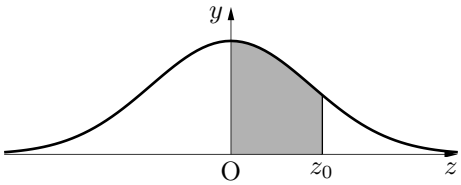
したがって, 少なくとも $\left(50 + \boxed{\text{チツ}}\right)$ 個のピーマンを抽出しておけば，**ピーマン分類法**で 25 袋作ることができる確率は 0.95 以上となる．

$\boxed{\text{セ}}$ ～ $\boxed{\text{タ}}$ の解答群（同じものを繰り返し選んでもよい.）

⓪ k	① $2k$	② $3k$	③ $\dfrac{50+k}{2}$
④ $\dfrac{25+k}{2}$	⑤ $25+k$	⑥ $\dfrac{\sqrt{50+k}}{2}$	⑦ $\dfrac{50+k}{4}$

正　規　分　布　表

次の表は，標準正規分布の分布曲線における右図の灰色部分の面積の値をまとめたものである．



z_0	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

(23 共通テスト本試験 IIB 3)

【答】

ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キク	ケ	コ	サ	シス	セ	ソ	タ	チツ
0	1	2	4	2	1	65	4	1	2	25	3	7	0	17

【解答】

(1) (i) X は正規分布 $N(m,\ \sigma^2)$ に従うから

$$P(X \geqq m) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \geqq \frac{m-m}{\sigma}\right) = P\left(\frac{X-m}{\sigma} \geqq \mathbf{0}\right) \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．また，正規分布曲線は平均 $X = m$ に関して対称であるから

$$P(X \geqq m) = \mathbf{\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(ii) 標本平均 $\overline{X} = \dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ については

$$E(\overline{X}) = \boldsymbol{m} \quad ④, \quad \sigma(\overline{X}) = \boldsymbol{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad ② \qquad \cdots\cdots(答)$$

が成り立つ．

- 確認しておこう．

$$\begin{aligned} E(\overline{X}) &= E\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n}\{E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n)\} \\ &= \frac{1}{n}(\underbrace{m + m + \cdots + m}_{n\ 個}) \\ &= m \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(\overline{X}) &= \sqrt{V\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n^2}\{V(X_1) + V(X_2) + \cdots + V(X_n)\}} \\ &= \sqrt{\frac{1}{n^2}\{\underbrace{\sigma^2 + \sigma^2 + \cdots + \sigma^2}_{n\ 個}\}} \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従うとき

$$\begin{aligned} &P(-z_0 \leqq Z \leqq z_0) = 0.901 \\ &2P(0 \leqq Z \leqq z_0) = 0.901 \\ \therefore\quad &P(0 \leqq Z \leqq z_0) = 0.4505 \end{aligned}$$

正規分布表より

$$z_0 = \mathbf{1.65} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

$n = 400,\ \overline{X} = 30.0\,\mathrm{g},\ \sigma(\overline{X}) = 3.6\,\mathrm{g}$ のとき，$n = 400$ は十分大きので，母標準偏差の代わりに $\sigma(\overline{X})$ を用いてよいので，ピーマン 1 個の重さは正規分布 $N(m,\ 3.6^2)$ に従い，標本平均 $\overline{X}$ は正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{3.6^2}{400}\right)$ に従う．

方針に基づくと，m の信頼度 90% の信頼区間は

$$-1.65 \leqq \frac{m-30.0}{\frac{3.6}{\sqrt{400}}} \leqq 1.65$$

$$30.0 - 1.65 \times \frac{3.6}{20} \leqq m \leqq 30.0 + 1.65 \times \frac{3.6}{20}$$

$$30.0 - 0.297 \leqq m \leqq 30.0 + 0.297$$

$$\therefore \quad 29.703 \leqq m \leqq 30.297$$

であり，解答欄の最も適するものは

$$\boldsymbol{29.7 \leqq m \leqq 30.3} \quad ④ \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．

(2) (i) 平均 $m = 30.0$ で S サイズは 30.0 g 以下，L サイズは 30.0 g を超えるものであるから，無作為に 1 個抽出したピーマンが S サイズである確率は

$$\boldsymbol{\frac{1}{2}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．ピーマンを無作為に 50 個抽出したときの S サイズのピーマンの個数を表す確率変数 U_0 は二項分布 $B\left(50, \frac{1}{2}\right)$ に従うので

$$p_0 = {}_{50}\mathrm{C}_{\boldsymbol{25}} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{25} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{50-25} \qquad \cdots\cdots(答)$$

$$= \cdots$$

$$= 0.1122 \quad (\because \text{ これは問題文にある値})$$

となるから，ピーマンを無作為に 50 個抽出したとき，ピーマン分類法で 25 袋作ることができる確率は 0.11 程度とわかる (S サイズと L サイズのピーマンが 1 つずつが入った袋ができる確率は 11% 程度である)．

(ii) k を自然数とし，ピーマンを無作為に $(50+k)$ 個抽出したとき，S サイズのピーマンの個数を表す確率変数を U_k とすると，U_k は二項分布 $B\left(50+k,\ \frac{1}{2}\right)$ に従う．このとき，U_k の

$$\text{平均は } (50+k) \times \frac{1}{2}, \quad \text{分散は } (50+k) \times \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{2}\right)$$

である．

$(50+k)$ は十分に大きいので，U_k は近似的に正規分布

$$N\left(\boldsymbol{\frac{50+k}{2}},\ \boldsymbol{\frac{50+k}{4}}\right) \quad ③,\ ⑦ \qquad \cdots\cdots(答)$$

に従い，$Y = \dfrac{U_k - \frac{50+k}{2}}{\sqrt{\frac{50+k}{4}}}$ とすると，Y は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う．

このとき

$$U_k = \frac{50+k}{2} - \frac{\sqrt{50+k}}{2} Y$$

であり，ピーマン分類法で，25 袋作ることができる確率 p_k は

$$p_k = P(25 \leqq U_k \leqq 25+k)$$

$$= P\left(25 \leqq \frac{50+k}{2} - \frac{\sqrt{50+k}}{2} Y \leqq 25+k\right)$$

$$= P(-k \leqq -\sqrt{50+k}Y \leqq k)$$

$$= P\left(-\frac{\boldsymbol{k}}{\sqrt{50+k}} \leqq Y \leqq \frac{k}{\sqrt{50+k}}\right) \quad ⓪ \qquad \cdots\cdots(答)$$

となる．

$k=\alpha$，$\sqrt{50+k}=\beta$ とおく．

$p_k \geqq 0.95$ になるような $\dfrac{\alpha}{\beta}\left(=\dfrac{k}{\sqrt{50+k}}\right)$ について，正規分布表から $\dfrac{\alpha}{\beta} \geqq 1.96$ を満たせばよいことがわかる．ここでは

$$\frac{\alpha}{\beta} \geqq 2 \qquad \cdots\cdots ①$$

を満たす自然数 k を考えることとする．① の両辺は正であるから

$$\begin{aligned}
&\alpha^2 \geqq 4\beta^2 \\
&k^2 \geqq 4(50+k) \\
&k^2-4k-200 \geqq 0
\end{aligned}$$

k は正の整数であるから

$$\begin{aligned}
k &\geqq 2+\sqrt{4+200}=2+2\sqrt{51} \\
&=2+2\times 7.14 \quad (\because\ \sqrt{51}=7.14) \\
&=16.28
\end{aligned}$$

$\alpha^2 \geqq 4\beta^2$ を満たす最小の k を k_0 とすると

$$k_0=\mathbf{17} \qquad \cdots\cdots(答)$$

であることがわかる．

したがって, 少なくとも 67 個のピーマンを抽出しておけば，ピーマン分類法で 25 袋作ることができる確率は 0.95 以上となる．